

[illegible]TAIRE

... AUTEURS

... KI

... se de mathématiques
... périeure et à l'École
... Paris, Armand Colin
.... 16 fr. »

... èves de la classe de
... écoles du Gouverne-
.... 10 fr. »

... es. Com-
... es....... 8 fr. »

... e Note sur
... métrie, par
.... 14 fr. »

... GRAND ...

... t **secondaire**. Paris,
... ois. On vend séparé-

.... 1 fr. 50
.... 2 fr. 50
.... 1 fr. 25
.... 1 fr. 75
.... 0 fr. 50

... **iques élémentaires,**
... ès sciences, Paris,
... ois.

... ance....... 5 fr. »
... ranger..... 6 fr. »

LEÇONS

DE

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

Conformes aux programmes du 27 juillet 1905
pour les classes de Première C et D et de Mathématiques A et B

PAR MM.

B. NIEWENGLOWSKI

Inspecteur général de l'Instruction publique, Docteur ès Sciences

ET

L. GÉRARD

Professeur au collège Chaptal, Docteur ès Sciences

GÉOMÉTRIE PLANE



PARIS.

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1907

7

W. W. Beman
6-15-1923

INTRODUCTION

1. Tout corps occupe une certaine *étendue*, qu'on appelle son *volume*.

Le volume d'un corps est limité par sa *surface*.

Une portion de surface est limitée par une ou plusieurs *lignes*.

Les extrémités d'une portion de ligne sont des *points*. Un point n'a pas d'étendue.

Deux surfaces qui se rencontrent ont en commun, soit une ou plusieurs lignes, soit un ou plusieurs points isolés.

Deux lignes qui se rencontrent ont en commun un ou plusieurs points.

On peut aussi concevoir le point a priori et définir une ligne comme une suite continue de points et une surface comme une suite continue de lignes.

2. Les volumes, surfaces, lignes et points, considérés en eux-mêmes, abstraction faite des corps matériels, constituent ce qu'on appelle des *figures*.

On désigne les points d'une figure par des lettres et on nomme une figure en énonçant successivement les lettres qui désignent un certain nombre de points de cette figure, convenablement choisis.

3. La *Géométrie* est la science qui a pour objet l'étude des propriétés des figures et la mesure de leur étendue.

4. On dit que deux figures sont *égales* ou *superposables*, quand elles peuvent s'appliquer exactement l'une sur l'autre, sans se déformer.

Nous aurons toujours soin de nommer *dans le même ordre* les points des deux figures qui viennent coïncider quand on applique ces deux figures l'une sur l'autre. Ainsi, quand nous dirons que deux triangles ABC et A'B'C' sont égaux, cela voudra dire qu'on peut les porter l'un sur l'autre de façon que le point A' coïncide avec le point A, le point B' avec le point B et le point C' avec le point C.

5. La plus simple de toutes les lignes est la LIGNE DROITE ; un fil tendu nous donne l'image d'une portion de droite.

Par abréviation, on dit souvent *droite* au lieu de *ligne droite*.

La propriété caractéristique de la ligne droite est la suivante :

Par deux points donnés, on peut toujours faire passer une droite et on n'en peut faire passer qu'une.

Ce que l'on peut encore énoncer ainsi :

Deux points déterminent une droite.

Donc deux droites ne peuvent avoir plus d'un point commun, à moins de coïncider.



Fig. 1.

A partir d'un point A d'une droite (fig. 1), on peut se déplacer sur cette droite dans deux sens différents, dans le sens AB ou dans le sens AC. La droite est indéfinie dans les deux sens.

Le point A partage la droite en deux parties, AB et AC, qu'on appelle des *demi-droites*. Le point A est l'*origine* commune de ces demi-droites. On nomme une

demi-droite par deux lettres, la première désignant l'origine et la seconde un point quelconque de la demi-droite.

6. Une portion de droite MN, comprise entre deux points M et N (fig. 2), s'appelle un *segment*, ou une *longueur*, ou une *ligne*, ou simplement une *droite*.

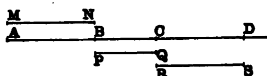


Fig. 2.

Il résulte de la propriété caractéristique de la ligne droite que, si un segment a ses deux extrémités sur une droite, tous ses points seront également sur cette droite. Cette remarque va nous permettre de comparer des segments entre eux.

Deux segments AB et MN sont *égaux* quand on peut les porter l'un sur l'autre de manière que les extrémités de l'un coïncident avec les extrémités de l'autre ; car, si leurs extrémités coïncident, ils coïncident dans toute leur étendue. Nous *admettrons* que, si on a pu les appliquer l'un sur l'autre en faisant coïncider M avec A et N avec B, on pourra également les appliquer l'un sur l'autre en faisant coïncider M avec B et N avec A, de sorte que nous écrirons indifféremment

$$MN = AB, \quad \text{ou} \quad MN = BA.$$

(Lisez : MN *égale* AB, ou MN *égale* BA.)

Soient MN et PQ deux segments quelconques; portons-les l'un à la suite de l'autre sur une droite indéfinie, en AB et en BC ; le segment *total* AC est dit la *somme* des deux segments MN et PQ, et on écrit :

$$AC = MN + PQ.$$

(Lisez : AC *égale* MN *plus* PQ.)

De même, si on porte un troisième segment RS en CD, à la suite de BC, le segment AD, formé par la réunion de AB, BC et CD, est dit la *somme* des trois segments MN, PQ, RS :

$$AD = MN + PQ + RS.$$

En continuant ainsi, on arrive à former la somme d'autant de segments qu'on voudra.

Cette somme est indépendante de l'ordre dans lequel on a ajouté les segments.

En effet, puisque RS = CD, nous *admettons* qu'on peut porter RS en DC de façon que R coïncide avec D et S avec C ; de même on peut porter PQ en CB. Donc :

$$RS + PQ = DB = BD = PQ + RS.$$

Ensuite, le segment AD, qui est la somme de MN, PQ et RS, peut être considéré comme la somme de MN et de PQ + RS, car PQ + RS = BD. De même, la somme de MN, RS et PQ pourrait être considérée comme la somme de MN et de RS + PQ. Or PQ + RS = RS + PQ. Donc

$$MN + PQ + RS = MN + RS + PQ.$$

On en conclut, en imitant un procédé déjà employé en arithmétique, que, dans une somme de n'importe combien de segments, on peut, sans altérer la somme, intervertir l'ordre de deux segments consécutifs quelconques et, par suite, ajouter les segments dans l'ordre qu'on voudra.

7. D'une manière générale, quand une grandeur a est la somme de deux autres grandeurs b et c, on dit que a est *plus grand* que b, que b est *plus petit* que a, et que c est la différence entre a et b, et on écrit :

$$a > b, \qquad b < a, \qquad c = a - b$$

(Lisez : *a plus grand que b, b plus petit que a, c égale a moins b.*)

Remarque. — Quand on ne sait pas quelle est la plus grande des deux grandeurs a et b, on désigne indifférement leur différence par $|a - b|$ ou par $|b - a|$.

Cela posé, soit à comparer deux segments AB et CD (fig. 3). Portons CD sur AB de façon que C coïncide avec A et que D tombe sur la *demi-droite* AB.

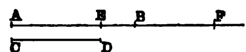


Fig. 3.

1° Si D tombe en B, CD = AB ;

2° Si D tombe en E entre A et B, AB > CD et AB — CD = EB ;

3° Si D tombe en F sur le prolongement de AB, CD > AB et CD — AB = BF.

8. Soient m et n deux nombres entiers ; si un segment a est la somme de n segments égaux à un autre segment b, on dit que a contient n fois b, que b est la n^e partie de a et on écrit :

$$a = nb, \quad b = \frac{1}{n} a.$$

Enfin, on désigne par $\frac{m}{n} a$ la somme de m segments égaux à $\frac{1}{n} a$.

En réalité, nb est mis pour $b \times n$; $\frac{m}{n} a$ pour $a \times \frac{m}{n}$.

9. Pour exécuter les opérations que nous venons de définir, on se sert de la *règle* et du *compas*. Nous ne nous arrêterons pas à décrire ces instruments, qui sont connus de tout le monde.

Nous dirons seulement que, pour vérifier une règle, on trace avec cette règle une ligne passant par deux points ; puis on retourne la règle et on trace une seconde ligne

passant par ces deux mêmes points. Si la règle est *juste*, les deux lignes doivent coïncider.

10. On appelle ligne *brisée* ou *polygonale* une ligne composée de lignes droites de directions différentes ; par exemple : ABCDE (fig. 4).

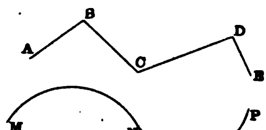


Fig. 4.

Les portions de droites qui constituent la ligne brisée s'appellent les *côtés*, et leur somme s'appelle le *périmètre* de la ligne brisée.

Toute ligne qui n'est ni droite ni brisée, s'appelle une ligne *courbe*. Telle est la ligne MNP (fig. 4).

11. La plus simple des surfaces est le plan ; la surface des eaux d'un lac tranquille offre l'image d'une portion de plan. Le plan est une surface indéfinie telle que toute droite qui passe par deux points quelconques de cette surface y soit entièrement contenue.

Par trois points non situés en ligne droite on peut faire passer un plan et un seul.

En effet, remarquons d'abord que, par une droite donnée, on peut faire passer une infinité de plans ; car traçons une droite sur un plan quelconque et transportons le plan et la droite jusqu'à ce que cette dernière coïncide avec la droite donnée ; on aura ainsi un plan passant par la droite donnée et il est évident qu'on peut le faire tourner autour de cette droite, sans qu'il cesse de la contenir.

Cela posé, soient A, B, C trois points quelconques non en ligne droite (fig. 5). Par la droite AB, faisons passer un plan et faisons-le tourner autour de cette droite ; il arrivera un moment où ce plan contiendra le point C, et, par suite, on peut faire passer un plan par les trois points

A, B, C. Reste à prouver qu'on n'en peut faire passer qu'un. En effet, soient P et Q deux plans passant par les trois points donnés. Les deux droites AB et AC sont tout entières dans chacun de ces deux plans, puisqu'elles ont chacune deux points dans chacun d'eux. Soit M un point du plan Q ; joignons-le à un point D de la droite AB choisi de telle sorte que les points D et M soient de part et d'autre de la droite AC. La droite DM a deux points, D et M, dans le plan Q ; donc elle y est contenue tout entière ; d'ailleurs elle coupe évidemment la droite AC, qui est aussi dans ce plan, en un point E. Or les points D et E appartiennent aussi au plan P ; par suite, la droite DEM est tout entière dans ce plan ; le point M, qui est sur cette droite, appartient donc au plan P. Ainsi, tout point de l'un des deux plans P ou Q est dans l'autre ; par conséquent, les deux plans coïncident.

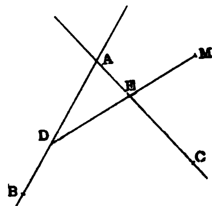


Fig. 5.

12. Si on fait tourner un plan autour d'une droite de ce plan jusqu'à ce que l'un des points du plan prenne la place primitivement occupée par un autre point du plan, le plan revient coïncider avec sa position primitive.

13. On appelle figure *plane* une figure dont toutes les parties sont dans un même plan.

Si on transporte une figure plane de façon que trois de ses points non en ligne droite viennent se placer dans un plan, la figure tombe tout entière dans ce plan.

CERCLE

14. La plus simple des courbes planes est la *circonférence de cercle.* On appelle ainsi la courbe (fig. 6) que

décrit l'extrémité M d'un segment OM, de longueur invariable, dont l'autre extrémité O reste fixe, pendant que le segment prend toutes les positions possibles autour du point O, en restant toujours dans un même plan.

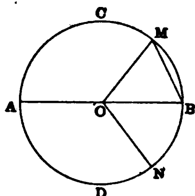


Fig. 6.

La portion de plan enfermée par cette courbe s'appelle *cercle*. Mais, pour abréger, nous emploierons le mot *cercle*, au lieu de *circonférence de cercle*, pour désigner la courbe elle-même.

Le point O est le *centre ;* les portions de droites qui joignent le centre aux points de la circonférence sont les *rayons*. Tous les rayons d'un cercle sont égaux, d'après la définition de la circonférence.

On appelle *corde*, une portion de droite qui joint deux points de la circonférence; *diamètre*, une corde qui passe par le centre. Tous les diamètres d'un cercle sont égaux comme étant chacun la somme de deux rayons.

On appelle *arc*, une portion de la circonférence telle que ACM, ou ADBM.

Deux circonférences de même rayon sont égales ; car si on fait coïncider leurs plans et leurs centres, ces deux courbes s'appliqueront exactement l'une sur l'autre.

On peut répéter pour des arcs d'une même circonférence ou de deux circonférences égales tout ce qui a été dit pour les segments dans les paragraphes 6-7-8.

15. *Tout diamètre AB partage le cercle et la circonférence en deux parties égales.*

Il s'agit de prouver que l'arc ACB (fig. 6) est égal à l'arc ADB. En effet, soit M un point de l'arc ACB ; plions la figure autour de AB jusqu'à ce que le demi-

plan ACB vienne s'appliquer sur le demi-plan ADB. Le rayon OM prendra une certaine position ON telle que ON = OM ; donc le point N appartient à l'arc inférieur ADB. Ainsi, tous les points de l'arc ACB viendront se placer sur l'arc ADB ; donc ces deux arcs sont égaux. Chacun d'eux vaut donc une demi-circonférence.

De même, la portion de plan comprise entre le diamètre AB et l'un ou l'autre des arcs ACB ou ADB est un demi-cercle.

16. Si l'on considère les deux arcs *sous-tendus* par une corde BM qui ne passe pas par le centre, l'un d'eux, BM, est moindre qu'une demi-circonférence ; l'autre, BDAM, est plus grand qu'une demi-circonférence.

SIGNIFICATION DES PRINCIPAUX TERMES EMPLOYÉS EN GÉOMÉTRIE

17. Axiome : proposition évidente par elle-même.

Ex. : *Deux figures égales à une troisième sont égales entre elles.*

Théorème : proposition que l'on rend évidente par un raisonnement appelé *démonstration*.

Ex. : *Tout diamètre partage une circonférence en deux parties égales.*

Postulatum (ou postulat) ou demande : proposition que l'on demande d'admettre sans démonstration, par exemple, le *postulatum d'Euclide* [41].

Corollaire : conséquence immédiate d'un ou plusieurs théorèmes [16].

Lemme : théorème préliminaire destiné à faciliter la démonstration d'un théorème plus important.

Problème : question à résoudre.

18. En général, l'énoncé d'un théorème se compose de deux parties : l'*hypothèse* ou la supposition qu'on fait, et la *conclusion* qu'on veut démontrer. Ainsi le théorème du n° 15 peut s'énoncer de la façon suivante :

Si une corde passe par le centre, elle divise la circonférence en deux parties égales.

L'hypothèse, c'est que la corde considérée passe par le centre ; et la conclusion, c'est qu'elle divise la circonférence en deux parties égales.

Etant donnée une proposition vraie ou fausse, si on prend la conclusion pour hypothèse et l'hypothèse pour conclusion, on obtient une nouvelle proposition qui est dite *réciproque* de la proposition primitive.

Par opposition à la réciproque, la proposition primitive s'appelle *directe*.

Ensuite, si on prend pour hypothèse la négation de l'hypothèse de la proposition directe et pour conclusion la négation de la conclusion de la proposition directe, on obtient une troisième proposition qui s'appelle la proposition *contraire* de la proposition directe.

Enfin, on peut encore considérer la *réciproque de la contraire* ou, ce qui revient au même, la *contraire de la réciproque*.

On a ainsi quatre propositions :

la directe,	la contraire,
la réciproque,	la contraire de la réciproque.

Il est essentiel de remarquer que la réciproque et la contraire sont toujours vraies ou fausses en même temps et qu'il en est de même de la directe et de la contraire de la réciproque.

Exemple :

PROPOSITION DIRECTE. Si une corde passe par le centre, elle divise la circonférence en deux parties égales.

RÉCIPROQUE. Si une corde divise la circonférence en deux parties égales, elle passe par le centre.

CONTRAIRE. Si une corde ne passe pas par le centre, elle divise la circonférence en deux parties inégales.

CONTRAIRE DE LA RÉCIPROQUE. Si une corde divise la circonférence en deux parties inégales, elle ne passe pas par le centre.

On vérifie sans peine que la première et la dernière de ces quatre popositions se déduisent l'une de l'autre et qu'il en est de même de la seconde et de la troisième. Par exemple, si on a démontré que toutes les cordes qui passent par le centre divisent la circonférence en deux parties égales, il en résulte immédiatement qu'une corde qui divise la circonférence en deux parties inégales ne peut passer par le centre; car, si elle passait par le centre, elle diviserait la circonférence en deux parties égales.

19. PRINCIPE DE RÉCIPROCITÉ. — Lorsque, dans une question, on a établi une série de théorèmes dont les hypothèses H, H′, H″ embrassent tous les cas possibles et dont les conclusions correspondantes C, C′, C″ sont incompatibles les unes avec les autres, toutes les réciproques sont vraies; c'est-à-dire que C entraîne H, que C′ entraîne H′, et que C″ entraîne H″.

En effet, C ne peut exister ni avec H′, car H′ entraîne C′ qui est incompatible avec C ; ni avec H″, car H″ entraîne C″ qui est incompatible avec C; mais il n'y a pas d'autres hypothèses possibles que H, H′, H″; donc, puisque C est

incompatible avec H′ et avec H″, il faut qu'elle entraîne H.

Ainsi, soit M un point situé dans le plan d'un cercle de centre O, et de rayon r. Ce point M peut être *intérieur* au cercle, ou *extérieur*, ou *situé sur la circonférence*.

S'il est intérieur, $OM < r$.

S'il est extérieur, $OM > r$.

S'il est sur la circonférence, $OM = r$.

Nous avons fait toutes les hypothèses possibles et nous sommes arrivés à trois conclusions incompatibles les unes avec les autres. Donc les trois réciproques sont vraies :

Si $OM < r$, le point M est intérieur.

Si $OM > r$, le point M est extérieur.

Si $OM = r$, le point M est sur la circonférence.

Démontrons, par exemple, que, si $OM < r$, le point M est intérieur. En effet, s'il était extérieur, OM serait plus grand que r, ce qui est contraire à l'hypothèse, et s'il était sur la circonférence, OM serait égal à r, ce qui est encore contre l'hypothèse.

20. On dit que la démonstration d'un théorème est *indirecte* lorsque, au lieu de montrer comment la conclusion se déduit de l'hypothèse, on fait voir que, si cette conclusion n'était pas vraie, on serait conduit à des conséquences incompatibles avec l'hypothèse. C'est ainsi que nous avons démontré, dans le n° 18, qu'une corde qui divise la circonférence en deux parties inégales ne passe pas par le centre.

PREMIÈRE PARTIE

GÉOMÉTRIE PLANE

PREMIER LIVRE

CHAPITRE PREMIER

DES ANGLES

21. On appelle *angle* la figure formée par deux demi-droites OA, OB (fig. 7) partant d'un même point O. L'origine commune de ces deux demi-droites se nomme le *sommet* de l'angle, les deux demi-droites qui le forment en sont les *côtés*. Les deux demi-droites OA, OB partagent le plan en deux régions, que nous avons distinguées l'une de l'autre sur la figure, en couvrant l'une de ces régions de hachures.

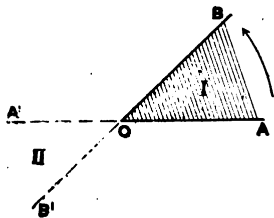


Fig. 7.

Si la demi-droite OA tourne autour du point O, sans quitter le plan, dans un sens convenable, indiqué par une flèche sur la figure, elle aura balayé, dans ses positions successives, la région (I) tout entière quand elle sera venue coïncider avec OB ; elle aura ainsi décrit l'angle défini par ces deux demi-droites. Mais, si l'on fait tourner OA en sens con-

traire, elle aura balayé entièrement la région (II) quand elle sera venue coïncider avec OB. On dit encore que OA a décrit un angle ; mais, pour éviter toute confusion, nous appellerons le premier angle un *angle saillant*, et le second un *angle rentrant*. Ainsi, en reprenant la définition donnée plus haut, nous dirons que deux demi-droites OA, OB partagent le plan en deux régions ; à celle de ces deux régions qui contient les prolongements des deux demi-droites, c'est-à-dire à celle qui contient les demi-droites opposées OA′, OB′, correspond l'angle rentrant, et à l'autre l'angle saillant, défini par ces deux demi-droites.

On désigne un angle de plusieurs manières :

1° Par une seule lettre, celle du sommet ;

2° Par trois lettres placées, la première sur l'un des côtés, la seconde au sommet, et la troisième sur l'autre côté ;

3° Par une lettre minuscule placée à côté de l'arc de cercle parcouru par un point de l'un des côtés, quand on fait tourner ce côté autour du sommet de manière à lui faire décrire l'angle en question.

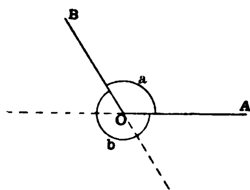


Fig. 8.

Pour éviter toute ambiguïté, nous n'emploierons les deux premières notations que pour désigner des angles *saillants*. Ainsi quand nous parlerons de l'angle O, ou de l'angle AOB, il s'agira toujours de l'angle *saillant* formé par les demi-droites OA et OB.

Au contraire, la troisième notation s'applique à toute espèce d'angles ; ainsi on peut désigner l'angle saillant de la figure 8 par *a* et l'angle rentrant par *b*.

22. Deux angles *saillants* AOB, A′O′B′ (fig. 9) sont *égaux* quand on peut les porter l'un sur l'autre de façon que les côtés de l'un coïncident avec les côtés de l'autre.

Nous admettrons que, si on a pu les appliquer l'un sur l'autre en faisant coïncider O′A′ avec OA et O′B′ avec OB, on pourra également les appliquer l'un sur l'autre en faisant coïncider O′B′ avec OA et O′A′ avec OB.

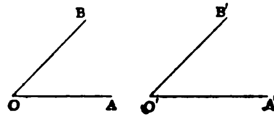


Fig. 9.

Il en est de même de deux angles *rentrants*. Mais un angle rentrant ne peut pas être égal à un angle saillant.

23. On obtient tous les angles possibles en faisant tourner une demi-droite OA autour de son origine O (fig. 10).

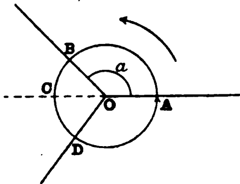


Fig. 10.

Pour suivre plus facilement le mouvement de cette demi-droite, considérons la circonférence décrite par l'un de ses points, A, par exemple.

Quand le point A parcourt un arc de cercle AB moindre qu'une demi-circonférence, la demi-droite OA décrit un angle saillant.

Quand le point A aura parcouru une demi-circonférence ABC, la demi-droite OA viendra coïncider avec le prolongement OC de sa direction primitive : nous dirons qu'elle *a décrit un angle* que nous appellerons provisoirement un angle *plat*.

Quand le point A aura parcouru un arc ABD plus grand qu'une demi-circonférence, la demi-droite OA aura décrit un angle rentrant.

Enfin, quand le point A aura parcouru toute la circon-

férence, la demi-droite OA sera revenue à sa position primitive après avoir fait un tour complet : nous dirons qu'elle *a décrit un angle* que nous appellerons provisoirement un angle *plein*.

Mais rien n'empêche de continuer la rotation. Supposons, par exemple, que la demi-droite OA, en tournant toujours dans le même sens, fasse deux tours complets et décrive ensuite un angle a saillant, plat ou rentrant : nous dirons qu'elle a décrit en tout un angle qui se compose de deux angles pleins et de l'angle a.

24. Tous les angles plats sont égaux, ainsi que les angles pleins. Soient a et a' deux angles qui se composent, l'un de n angles pleins et d'un angle b saillant, plat ou rentrant, l'autre de n' angles pleins et d'un angle b' saillant, plat ou rentrant (n et n' désignant des nombres entiers) ; on dit que ces deux angles a et a' sont égaux si $n = n'$ et $b = b'$.

25. On appelle *somme* de deux angles a et b (fig. 11) l'angle c engendré par une demi-droite qui décrit successivement et en tournant toujours dans le même sens deux angles égaux à a et à b. L'angle b s'appelle la *différence* entre a et c, et on écrit

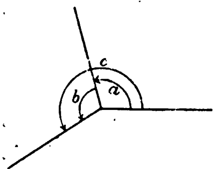


Fig. 11.

$$a + b = c,$$
$$b = c - a,$$
$$c > a, \quad a < c.$$

On définit de la même manière la somme d'un nombre quelconque d'angles et on peut répéter pour les angles tout ce qui a été dit sur les segments [6-7-8].

REMARQUE. — Les angles que nous considérerons désormais seront toujours supposés *saillants*, à moins que le contraire ne soit spécifié ou indiqué par le contexte.

ANGLES AU CENTRE

26. Dans une circonférence, on appelle *angle au centre* un angle formé par deux rayons : par exemple (fig. 12), l'angle AOB.

Théorème. — *Dans une même circonférence, ou dans des circonférences égales, deux angles au centre égaux interceptent des arcs égaux, et réciproquement.*

En effet, soient (fig. 12) AOB, A′O′B′ deux angles au centre égaux, dans deux circonférences égales. Si nous faisons coïncider les angles, les circonférences coïncideront, l'arc A′B′ s'appliquera exactement sur l'arc AB; donc ces arcs sont égaux.

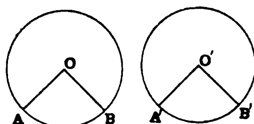


Fig. 12.

Réciproquement, *dans deux circonférences égales, deux angles au centre sont égaux quand ils interceptent des arcs égaux;* car, si nous portons les deux circonférences l'une sur l'autre de manière que les arcs égaux AB, A′B′ coïncident, les angles AOB, A′O′B′ coïncideront aussi; donc ils sont égaux.

ROTATION

27. Quand une figure plane indéformable se déplace dans son plan et que l'un de ses points reste fixe, on dit qu'elle *tourne* autour de ce point fixe et le mouvement de la figure s'appelle une *rotation*.

Soit O le point fixe (fig. 13); tous les autres points de

la figure décrivent, dans le même sens, des arcs de cercle ayant O pour centre ; de plus, les droites qui les joignent au point O décrivent des angles égaux. En effet, soient A et B deux points de la figure, que la rotation amène en A′ et B′, et soit C le point de rencontre de OA avec la circonférence décrite de O comme centre avec OB pour rayon. Si nous supposons que la rotation s'effectue dans le sens CB, le point B décrira un arc BB′, qui sera la continuation de l'arc CB, et le point C viendra se placer en un point C′ de l'arc CBB′ tel que l'arc C′B′ soit égal à l'arc CB, puisque la figure ne se déforme pas. Donc, si de l'arc total CBB′ on retranche successivement les arcs CB et C′B′, les arcs restants BB′ et CC′ seront égaux; par conséquent [26], l'angle BOB′, dont a tourné le point B, est égal à l'angle COC′ ou AOA′, dont a tourné le point A.

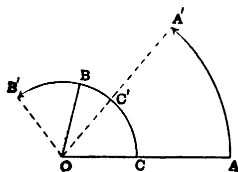


Fig. 13.

GRADUATION DE LA CIRCONFÉRENCE

28. Considérons deux circonférences *concentriques*, c'est-à-dire ayant le même centre O (fig. 14). Si nous supposons que la circonférence OA soit partagée, par exemple, en six parties égales par les rayons OA, OB, OC,..., l'autre circonférence OA′ sera partagée en un même nombre de parties égales par les mêmes rayons. En effet, les angles au centre AOB, BOC..., sont égaux comme interceptant des arcs égaux sur la circonférence OA [26] ; donc ces angles interceptent

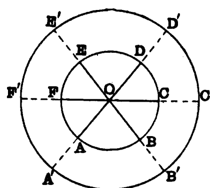


Fig. 14.

aussi des arcs égaux sur la circonférence OA′. Par conséquent $\widehat{A'B'} = \widehat{B'C'} = \ldots$

29. Corollaires. — I. — *Si un angle de sommet* O *intercepte un arc égal à* m *fois la* n^e *partie de la circonférence* OA, *il interceptera également sur la circonférence* OA′ *un arc égal à* m *fois la* n^e *partie de cette circonférence.*

Ainsi l'angle AOC intercepte deux arcs, AC et A′C′, qui sont respectivement les $\frac{2}{6}$ ou plus simplement le $\frac{1}{3}$ des circonférences OA et OA′.

30. II. — *Si deux angles* AOB *et* A′O′B′ (fig. 15) *interceptent sur deux circonférences décrites de leurs sommets comme centres des arcs* AB, A′B′ *respectivement égaux à* m *fois la* n^e *partie de ces deux circonférences, ces deux angles sont égaux.* En effet, décrivons de O comme centre avec O′A′ pour rayon une circonférence qui rencontre OA en C et OB en D. D'après le corollaire I, l'arc CD est égal à m fois la n^e partie de la circonférence OC, et par conséquent égal à l'arc A′B′. Donc les angles COD et A′O′B′ sont égaux, comme interceptant des arcs égaux dans des circonférences égales.

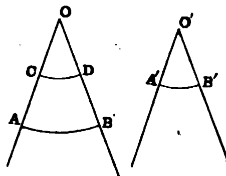


Fig. 15.

31. On divise ordinairement, par la pensée, une circonférence en 360 parties égales, qu'on appelle des *degrés*, chaque degré en 60 *minutes* et chaque minute en 60 *secondes*.

Pour abréger, on se sert des caractères $^{\circ}\,'\,''$, qui signifient *degrés, minutes, secondes*. Ainsi, on écrit $34^{\circ}\,25'\,18''$ au lieu de 34 degrés 25 minutes 18 secondes.

Il résulte de ce que nous avons dit [29] que, si du

sommet O d'un angle donné (fig. 15), avec un rayon arbitraire, on décrit une circonférence, l'arc AB compris entre les côtés de l'angle aura toujours le même nombre de degrés, minutes et secondes, quel que soit le rayon OA.

Si l'arc AB se compose, par exemple, de 34°25′18″, nous dirons que l'angle AOB est *un angle de* 34°25′18″.

Deux angles du même nombre de degrés sont égaux [30].

En particulier, deux angles d'un degré sont égaux et s'appellent des *degrés*. Il en est de même des angles d'une minute et des angles d'une seconde.

Un angle de 34°25′18″ doit être considéré comme la somme de 34 angles d'un degré, de 25 angles d'une minute et de 18 angles d'une seconde; c'est en ce sens qu'on dit qu'il *vaut* 34°25′18″.

Un angle plat est un angle de 180°. Un angle plein est un angle de 360°.

Pour trouver le nombre de degrés contenus dans un angle, on se sert du *rapporteur* (fig. 16). On appelle ainsi un demi-cercle ordinairement en corne transparente ou en cuivre, dont la circonférence est divisée en 180 degrés.

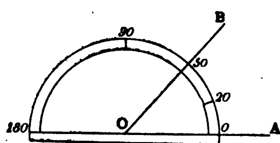


Fig. 16.

Pour mesurer un angle AOB, on place le centre du rapporteur au sommet de l'angle, le diamètre sur le côté OA, et on lit le numéro de la division du rapporteur qui correspond au côté OB. Par exemple, si le côté OB passe par la division 50, c'est que l'angle AOB est de 50°.

Inversement, si on veut mener par le point O une droite faisant avec OA un angle de 50°, on place le rapporteur comme ci-dessus et on mène la droite OB qui passe par la division 50.

32. On appelle *quadrant* un quart de circonférence ou un arc de 90°.

On appelle *angle droit* un angle de 90°, c'est-à-dire un angle qui intercepte sur une circonférence quelconque ayant son sommet pour centre un arc égal au quart de cette circonférence.

Tous les angles droits sont égaux [30].

On dit que deux droites AB et CD (fig. 17) qui se coupent sont *perpendiculaires* quand l'un des quatre angles formés par ces deux droites est droit. Dans ce cas, ces angles sont droits tous les quatre. En effet, supposons, par exemple, que l'angle AOC soit droit; décrivons, de O comme centre, une circonférence qui rencontre les quatre demi-droites en A, B, C, D. Comme ACB est une demi-circonférence et que l'arc AC est, par hypothèse, un quadrant, il en résulte que l'arc CB est aussi un quadrant; il en est de même des deux autres arcs BD et AD. Donc les quatre angles AOC, COB, BOD, DOA sont droits.

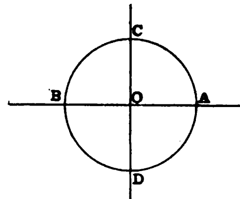


Fig. 17.

On dit que deux angles sont *supplémentaires* quand leur somme est égale à 180° ou à deux angles droits.

On appelle *complémentaires* deux angles dont la somme est égale à 90° ou à un angle droit.

On appelle angle *obtus* un angle plus grand qu'un angle droit, et angle *aigu* un angle plus petit qu'un angle droit.

ANGLES FORMÉS AUTOUR D'UN POINT

33. On dit que deux angles sont *adjacents* quand ils ont même sommet, un côté commun et qu'ils sont situés de part et d'autre du côté commun.

Théorème. — *Si les côtés non communs de deux angles adjacents,* AOB *et* BOC (fig. 18), *sont en ligne droite, ces angles sont supplémentaires, et réciproquement.*

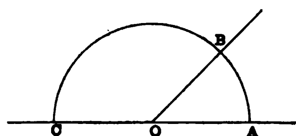


Fig. 18.

En effet, décrivons de O comme centre avec un rayon quelconque une circonférence, qui rencontre les trois côtés en A, B, C. Comme la somme des arcs AB et BC est une demi-circonférence, la somme des angles AOB et BOC vaut 180°.

Réciproquement, si les angles AOB et BOC valent ensemble 180°, la somme des arcs AB et BC est une demi-circonférence; donc les deux rayons OA et OC forment un diamètre.

34. Plus généralement, *la somme des angles consécutifs* AOB, BOC, COD, DOE *formés autour d'un point* O *d'un même côté d'une droite* AE (fig. 19) *est égale à deux angles droits.* Car, si l'on décrit une circonférence de centre O, qui rencontre les côtés en A, B, C, D, E, la somme des arcs AB, BC, CD, DE étant une demi-circonférence, la somme des angles AOB, BOC, COD, DOE vaut 180°.

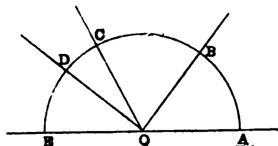


Fig. 19.

De même, *la somme des angles consécutifs* AOB, BOC, COD, DOE, EOA (fig. 20) *formés tout autour du point* O *est égale à quatre angles droits.* Car la somme des arcs AB, BC, CD, DE, EA est égale à 360°.

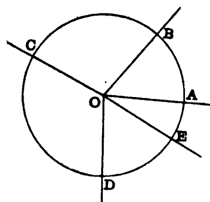


Fig. 20.

Les réciproques de ces deux théorèmes se démontrent sans difficulté.

35. On dit que deux angles, tels que AOD et BOC (fig. 21), sont *opposés par le sommet* quand ils ont même sommet et que les côtés de l'un sont les prolongements des côtés de l'autre.

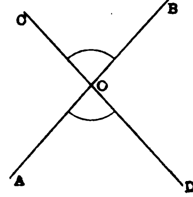


Fig. 21.

Théorème. — *Deux angles opposés par le sommet sont égaux.*

En effet, les angles AOD et BOC ont tous deux pour supplément l'angle AOC; donc ils sont égaux.

Réciproquement, *si deux angles égaux* AOD *et* BOC *ont les côtés* OA *et* OB *dans le prolongement l'un de l'autre et si les deux autres côtés* OC *et* OD *sont de part et d'autre de la droite* AB, *ces deux derniers côtés sont aussi en ligne droite.*

Car l'angle BOD a pour supplément AOD ou son égal BOC; donc les côtés OC et OD sont en ligne droite [33].

BISSECTRICE

36. On appelle *bissectrice* d'un angle AOB (fig. 22) la droite qui partage cet angle en deux parties égales.

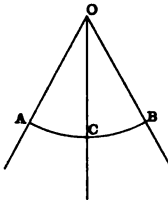


Fig. 22.

Soit AB un arc de cercle compris entre les deux côtés de cet angle et décrit de son sommet comme centre ; et soit C le milieu de l'arc AB. Les angles AOC, COB sont égaux ; donc OC est la bissectrice de l'angle AOB.

37. **Théorème.** — *Les bissectrices* OD, OE (fig. 23) *de deux angles adjacents supplémentaires* AOC, COB *forment un angle droit.*

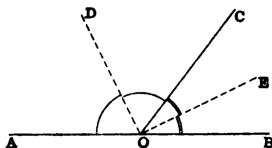


Fig. 23.

En effet, les deux angles DOC, COE sont respectivement les moitiés des angles AOC, COB, dont la somme vaut deux droits; donc l'angle DOE est droit.

38. **Théorème.** — *Les bissectrices des quatre angles formés par deux droites* AC, BD (fig. 24) *qui se coupent forment deux droites perpendiculaires.*

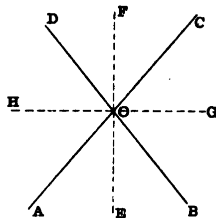


Fig. 24.

Remarquons d'abord que les bissectrices OE, OF des deux angles AOB, COD opposés par le sommet sont en ligne droite; car les angles AOE et COF étant égaux comme moitiés d'angles égaux et ayant les côtés OA et OC dans le prolongement l'un de l'autre, les deux autres côtés, OE et OF, qui sont de part et d'autre de AC, sont aussi dans le prolongement l'un de l'autre. Il en est de même des bissectrices OG et OH. Enfin l'angle EOG est droit [37]; donc les quatre bissectrices OE, OF, OG, OH forment deux droites rectangulaires EF et GH.

EXERCICES

1. Soient A, B, C trois points en ligne droite et M le milieu de AB. Démontrer que le segment CM est égal à la demi-somme ou à la demi-différence des segments CA et CB selon que le point C est situé sur le prolongement de AB ou compris entre les deux points A et B.

La même propriété a lieu pour des arcs de cercle.

2. Soient OA, OB, OC trois demi-droites issues d'un même point et OM la bissectrice de l'angle AOB. Démontrer que l'angle COM est égal à la demi-somme ou à la demi-différence des angles COA et COB selon que OC est en dehors de l'angle AOB ou à l'intérieur de cet angle.

3. Si quatre demi-droites issues d'un même point forment quatre angles consécutifs tels que le premier soit égal au troisième et le second au quatrième, elles sont deux à deux dans le prolongement l'une de l'autre.

4. Si un rayon de lumière est réfléchi par un miroir susceptible de tourner autour du point d'incidence, quand le miroir aura tourné d'un certain angle, le rayon réfléchi aura tourné d'un angle double. (Le rayon incident et le rayon réfléchi sont également inclinés sur le miroir, qu'on supposera réduit à une ligne droite située dans le plan des rayons.)

CHAPITRE II

THÉORIE DES PARALLÈLES

39. On dit que deux droites situées dans un même plan sont *parallèles* lorsqu'elles ne se rencontrent point, quelque loin qu'on les prolonge.

Par opposition, deux droites qui se rencontrent sont dites *concourantes*.

Deux droites AB, CD (fig. 25) coupées par une troisième EF forment huit angles, quatre *internes :* AGH, BGH, CHG, DHG, et quatre *externes :* AGE, BGE, CHF, DHF. Ces huit angles, considérés deux à deux, ont reçu des noms particuliers.

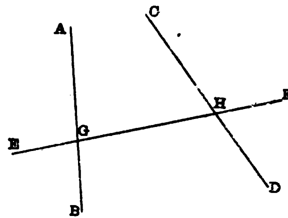


Fig. 25.

On appelle *alternes internes* deux angles internes, non adjacents et situés de part et d'autre de la sécante EF : par exemple, AGH et DHG.

On appelle *alternes externes* deux angles externes, non adjacents et situés de part et d'autre de la sécante : par exemple, AGE et DHF.

On appelle *correspondants* deux angles non adjacents, l'un interne, l'autre externe, et situés tous deux du même côté de la sécante : par exemple, AGE et CHG.

On appelle *intérieurs* deux angles internes situés du même côté de la sécante : par exemple, AGH et CHG.

Il y a deux couples d'angles alternes internes : AGH et DHG, BGH et CHG;

Deux couples d'angles alternes externes : AGE et DHF, BGE et CHF;

Quatre couples d'angles correspondants : AGE et CHG, AGH et CHF, BGE et DHG, BGH et DHF;

Deux couples d'angles intérieurs : AGH et CHG, BGH et DHG.

Si deux angles alternes internes sont égaux, les deux autres le seront aussi ; il en sera de même des angles alternes externes et des angles correspondants, et les angles intérieurs seront supplémentaires. Réciproquement, si deux angles intérieurs sont supplémentaires, tous les couples d'angles alternes internes, alternes externes, correspondants seront égaux.

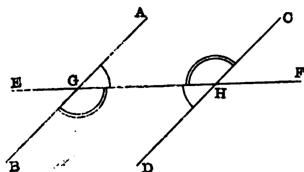


Fig. 26.

40. ***Théorème.*** — *Deux droites* AB *et* CD (fig. 26) *qui font avec une sécante* GH *des angles alternes internes égaux sont parallèles.*

En effet, supposons que les angles AGH et DHG soient égaux ; leurs suppléments, BGH et CHG, le seront aussi.

Donc les deux figures, AGHC et DHGB, sont superposables; car on peut les faire coïncider en portant la première sur la seconde de manière que le point G vienne en H et le point H en G. On en conclut que, si les demi-droites GA et HC se rencontraient, les demi-droites HD et GB se rencontreraient aussi; mais alors les deux droites AB et CD auraient deux points communs, ce qui est impossible. Par conséquent, ces deux droites sont parallèles.

COROLLAIRES. — I. — *Deux droites sont parallèles quand elles font avec une sécante deux angles intérieurs supplémentaires, ou deux angles correspondants égaux.*

II. — *Deux droites* AB *et* CD (fig. 27) *perpendiculaires à une troisième* GH *sont parallèles, car les angles alternes internes sont égaux, comme droits.* D'ailleurs, on peut s'en rendre compte directement en pliant la figure autour de GH : les demi-droites GA et HC viennent s'appliquer sur GB et sur HD. Donc, si les droites AB et CD se rencontraient en un point situé d'un côté de GH, elles se rencontreraient aussi en un autre point situé de l'autre côté de GH ; ce qui est impossible. Donc elles sont parallèles.

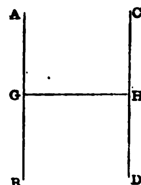


Fig. 27.

41. POSTULATUM D'EUCLIDE [1]. — Nous *demandons* d'admettre que, *si deux droites* AB *et* CD (fig. 28) *coupées par une sécante* GH *font avec elle des angles intérieurs non supplémentaires, elles se rencontrent du côté où la somme des angles intérieurs est moindre que deux droits.*

---

[1] EUCLIDE, célèbre géomètre grec, 285 avant J.-C.

La somme des quatre angles internes AGH, CHG, BGH, DHG est égale à quatre angles droits ; par conséquent, si la somme des deux angles intérieurs AGH, CHG n'est pas égale à deux droits, la somme des deux autres angles intérieurs BGH, DHG ne le sera pas non plus; l'une de ces deux sommes sera plus petite que deux droits et l'autre plus grande.

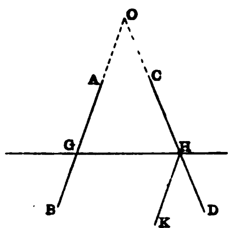


Fig. 28.

Supposons, par exemple, $\widehat{BGH} + \widehat{DHG} > 2$ droits ; nous pourrons mener dans l'angle GHD une droite HK faisant avec GH un angle supplémentaire de BGH ; cette droite HK sera parallèle à GB [40, I] et les deux demi-droites GB, HD, étant situées de part et d'autre de HK, ne pourront pas se rencontrer. Le postulat d'Euclide consiste à admettre que les deux autres demi-droites GA et HC se rencontrent nécessairement, c'est-à-dire que les deux droites AB et CD se rencontrent du côté de A et de C, où la somme des angles intérieurs AGH, CHG est moindre que deux droits.

24. **Théorème.** — *Par un point* H *pris hors d'une droite* AB (fig. 28), *on peut mener une parallèle à cette droite et on n'en peut mener qu'une.*

En effet, joignons le point H à un point quelconque G de la droite AB et faisons du côté de B un angle GHK supplémentaire de BGH : la droite HK ainsi obtenue sera parallèle à AB [40,I]. D'ailleurs, toute autre droite CD passant par H fera avec GH un angle GHD non supplémentaire de BGH, et, par conséquent, rencontrera la droite AB [41].

Remarque. — Le postulat d'Euclide s'énonce souvent ainsi :

Par un point, on ne peut mener qu'une parallèle à une droite.

Cette proposition est équivalente à celle du numéro 41. En effet, nous venons de voir qu'elle s'en déduit; et réciproquement, si l'on admet que par un point on ne puisse mener qu'une parallèle à une droite, il en résulte que, si deux droites AB et CD coupées par une sécante GH font avec elle deux angles intérieurs non supplémentaires, elles se rencontrent nécessairement; car autrement, en faisant du côté de B un angle GHK supplémentaire de BGH, on aurait deux droites, HK et HD, passant par le point H et parallèles à AB. De plus, nous avons démontré [41] qu'elles ne peuvent pas se rencontrer du côté où la somme des angles intérieurs est plus grande que deux droits ; donc elles se rencontrent du côté où la somme des angles intérieurs est moindre que deux droits.

Corollaires. — I. — *Deux droites parallèles à une troisième sont parallèles l'une à l'autre;* car, si elles avaient un point commun, on pourrait mener par ce point deux parallèles à la troisième droite.

II. — *Quand deux droites* AB *et* HK *sont parallèles* (fig. 28), *toute droite qui rencontre l'une rencontre l'autre.* En effet, supposons que CD rencontre HK en un point H; comme, par ce point H, on ne peut pas mener à AB d'autre parallèle que HK, il faut bien que CD rencontre AB.

43. ***Théorème.*** — *Les angles intérieurs formés par deux parallèles coupées par une sécante sont supplémentaires;* car, s'ils ne l'étaient pas, les deux droites ne seraient

angles alternes
oupées par une
lternes externes

roites AB *et* CD
perpendiculaire
effet, supposons
oint F. D'abord
[42, corollaire
G ; ensuite les
nternes F et G
me le premier
nd l'est aussi.

droites A *et* B
erpendiculaires à
rallèles ; car A,
3,I] perpendicu-
tes A et B étant
rallèles.

nent perpendicu-
B′ *sont concou-*
′ et B′ le seraient

ont leurs côtés
supplémentaires.
ux angles ABÇ,
ont parallèles et
et EF. Soit G le
EF. Les angles
ondants par rap-

port aux deux parallèles BC et EF coupées par la sécante AB. Pareillement, les angles AGF et DEF sont égaux. Donc les angles ABC, DEF le sont aussi.

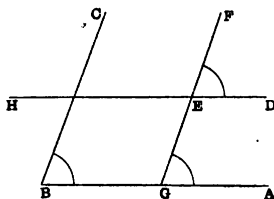


Fig. 30.

Considérons maintenant deux angles ABC, GEH dont les côtés sont respectivement parallèles et de *sens contraires*. Les angles GEH et DEF sont égaux, comme opposés par le sommet; donc l'angle GEH est aussi égal à ABC.

Enfin l'angle FEH ou DEG est supplémentaire de ABC.

Corollaire. — *Deux angles qui ont leurs côtés respectivement perpendiculaires sont égaux ou supplémentaires;* car, si l'on fait tourner l'un d'eux de 90° autour de son sommet, ses côtés deviennent parallèles à ceux de l'autre.

Remarque. — Quand deux angles ont leurs côtés parallèles ou perpendiculaires, s'ils sont de même espèce, c'est à dire tous deux aigus ou tous deux obtus, ils sont égaux; s'ils sont d'espèces différentes, ils sont supplémentaires.

EXERCICE

Quand deux angles ont leurs côtés parallèles ou perpendiculaires, les bissectrices de ces deux angles sont parallèles ou perpendiculaires.

CHAPITRE III

POLYGONES, TRIANGLES

45. On appelle *polygone* une ligne brisée fermée, telle que ABCDE (fig. 31). Les portions de droites qui constituent cette ligne brisée sont les *côtés* du polygone. Les angles formés par deux côtés consécutifs sont les *angles* du polygone et les extrémités des côtés sont les *sommets* du polygone.

Les droites, telles que AC, qui joignent deux sommets non consécutifs sont les *diagonales* du polygone.

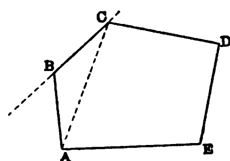


Fig. 31.

On appelle *triangle* un polygone de trois côtés ; *quadrilatère*, un polygone de quatre côtés ; *pentagone*, un polygone de cinq côtés, etc.

On dit qu'une ligne brisée, fermée ou non, est *convexe* quand elle est située tout entière d'un même côté par rapport à chacun de ses côtés prolongés. Un triangle est toujours convexe.

On dit qu'un triangle est *rectangle* quand il a un angle droit ; le côté opposé à l'angle droit est l'*hypoténuse*.

On dit qu'un triangle est *isoscèle* quand il a deux côtés égaux ; *équilatéral* quand il a ses trois côtés égaux.

Dans un triangle quelconque, on prend indifféremment pour *base* l'un quelconque des trois côtés ; le sommet opposé au côté pris pour base s'appelle le *sommet du triangle*, et la perpendiculaire abaissée du sommet sur la base s'appelle la *hauteur*. Mais, dans un triangle isoscèle, c'est le point de concours des côtés égaux qu'on

appelle, de préférence, le *sommet du triangle*, et le côté opposé qu'on appelle la *base*.

On appelle angle *extérieur* d'un triangle ABC (fig. 32) un angle, tel que ACD, formé par un côté CA et le prolongement d'un autre côté BC.

On appelle *médiane* d'un triangle la droite qui joint un sommet au milieu du côté opposé ; *bissectrice intérieure*, la bissectrice de l'un des angles du triangle ; *bissectrice extérieure*, la bissectrice de l'un des angles extérieurs ; *médiatrice*, la perpendiculaire au milieu de l'un des côtés.

46. **Théorème.** — *La somme des angles d'un triangle* ABC (fig. 32) *est égale à deux angles droits.*

En effet, soit CD le prolongement de BC; par le point C, menons une demi-droite CE parallèle à BA et du même côté que le point A par rapport à la droite BD. Les angles A et ACE sont égaux comme alternes internes; les angles B et DCE sont égaux comme correspondants. Donc la somme des trois angles du triangle est égale à la somme des trois angles DCE, ECA, ACB, c'est-à-dire égale à deux angles droits.

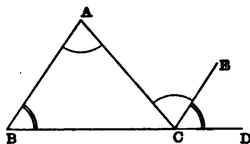


Fig. 32.

Corollaires. — I. — *L'angle extérieur* ACD *est égal à la somme des angles intérieurs non adjacents* A *et* B.

Par conséquent, cet angle extérieur ACD est plus grand que chacun des angles A et B. On peut le démontrer directement, *sans s'appuyer sur le postulat d'Euclide*, en joignant le point B au milieu M du côté AC (fig. 33) et en prolongeant BM d'une longueur ME égale à BM. Si

l'on fait tourner le triangle MAB de 180° autour du point M, il vient coïncider avec le triangle MCE. Donc l'angle A est égal à l'angle MCE et, par conséquent, moindre que l'angle ACD.

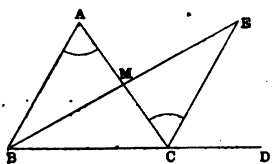


Fig. 33.

II. — *Un triangle ne peut avoir qu'un seul angle obtus ou droit.* En particulier, dans un triangle rectangle, les deux angles autres que l'angle droit valent ensemble un angle droit ; donc ils sont aigus et complémentaires.

III. — *Dans un triangle, un angle quelconque est supplémentaire de la somme des deux autres.* Par conséquent, si deux triangles ABC, A'B'C' ont deux angles égaux chacun à chacun : $A = A'$, $B = B'$, les troisièmes angles C et C' sont aussi égaux ; car

$$C = 180° - A - B = 180° - A' - B' = C'.$$

En particulier, si deux triangles rectangles ont un angle aigu égal, ils ont aussi l'autre angle aigu égal.

IV. — *Deux triangles* ABC, A'B'C' *qui ont les côtés parallèles ou perpendiculaires ont leurs trois angles égaux chacun à chacun.*

En effet, nous savons déjà [44, corollaire] qu'ils ont leurs angles respectivement égaux ou supplémentaires. Or il est impossible que deux angles du premier soient supplémentaires de deux angles du second ; car si on avait, par exemple,

$$A + A' = 180°, \quad B + B' = 180°,$$

il en résulterait que $A + A' + B + B' = 360°$, et, comme

la somme des six angles des deux triangles est précisément égale à 360°, il ne resterait rien pour les deux angles C et C′. Les deux triangles ont donc au moins deux angles égaux chacun à chacun, et alors les troisièmes angles sont aussi égaux [III].

47. **Théorème.** — *La somme des angles d'un polygone convexe* ABCDEF (fig. 34) *est égale à autant de fois deux droits que ce polygone a de côtés moins deux.*

En effet, menons par le point A les diagonales AC, AD, AE ; la somme des angles du polygone est évidemment égale à la somme des angles des triangles ABC, ACD,... Or, il y a autant de triangles que de côtés moins deux, car on peut considérer ces triangles comme ayant pour sommet commun le point A et pour bases respectives les côtés BC, CD,... du polygone autres que les deux côtés AB, AF qui partent du point A. Mais la somme des angles de chaque triangle est égale à deux angles droits. Donc la somme des angles du polygone est égale à autant de fois deux droits qu'il y a de côtés moins deux.

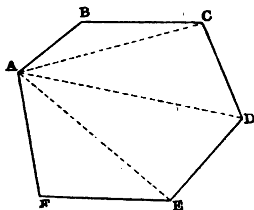


Fig. 34.

Soit n le nombre des côtés ; la somme des angles du polygone est égale à

$$(n - 2)\ 2 \text{ droits} = (2n - 4) \text{ angles droits.}$$

Cas particulier. — Un quadrilatère convexe se compose de deux triangles ; donc la somme des angles d'un quadrilatère convexe est égale à deux fois deux droits, c'est-à-dire égale à quatre angles droits.

48. **Théorème.** — *Si l'on prolonge l'un des côtés de chacun des angles d'un polygone convexe, au delà du sommet, la somme des angles extérieurs ainsi formés est égale à quatre angles droits.*

En effet, chacun de ces angles extérieurs est supplémentaire de l'angle intérieur qui lui est adjacent. Donc, si n est le nombre des côtés du polygone, la somme de tous les angles intérieurs et extérieurs est égale à $2n$ angles droits ; mais la somme des angles intérieurs est [47] égale à $2n - 4$ angles droits ; par conséquent, celle des angles extérieurs est égale à quatre angles droits.

49. **Théorème.** — *Dans un triangle isoscèle, aux côtés égaux sont opposés des angles égaux.*

Soit ABC (fig. 35) un triangle dans lequel les côtés AB et AC sont égaux ; il faut prouver que les angles C et B le sont aussi. En effet, menons la bissectrice AD de l'angle BAC et plions la figure autour de cette bissectrice. A cause de l'égalité des angles DAB, DAC, le côté AB prend la direction du côté AC, et, comme ces côtés sont égaux, le point B viendra en C. Or, le point D n'a pas bougé, donc l'angle B coïncidera avec l'angle C; ces deux angles sont donc égaux.

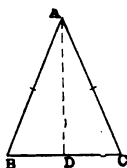


Fig. 35.

Corollaires. — I. — Il résulte de cette démonstration que le point D est le milieu du côté BC et que les angles en D sont égaux et, par conséquent, droits, puisque leur somme vaut deux droits. Donc,

Dans un triangle isoscèle, la bissectrice de l'angle for-

mé par les côtés égaux partage le côté opposé en deux parties égales et lui est perpendiculaire.

En d'autres termes :

Dans un triangle isoscèle, la même droite est en même temps bissectrice de l'angle au sommet, médiane, hauteur et médiatrice.

II. — *Les trois angles d'un triangle équilatéral sont égaux, et chacun d'eux vaut* $\frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$.

50. **Théorème.** — *Si, dans un triangle* ABC (fig. 36), *le côté* AB *est plus grand que le côté* AC, *l'angle* C *opposé au côté* AB *est plus grand que l'angle* B *opposé au côté* AC. *Et réciproquement.*

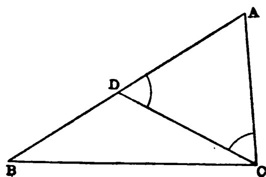


Fig. 36.

En effet, prenons sur AB une longueur AD égale à AC et traçons DC. Dans le triangle isoscèle ACD, les angles ACD et ADC sont égaux. Donc l'angle B du triangle BCD, étant moindre que l'angle *extérieur* ADC [46, corollaire I], sera aussi moindre que ACD et, à plus forte raison, moindre que l'angle total ACB.

Remarque. — L'angle B est nécessairement *aigu;* car, s'il était droit ou obtus, l'angle C serait obtus, ce qui est impossible puisque, dans un triangle, il y a au moins deux angles aigus.

51. En vertu du principe de réciprocité [19], les réciproques des deux théorèmes précédents sont vraies. En effet, si l'on compare les deux côtés AB et AC d'un triangle ABC, il n'y a que trois hypothèses possibles : ou AB = AC et alors C = B, ou AB > AC et alors C > B, ou

$AC > AB$ et alors $B > C$. Donc, puisque les trois hypothèses possibles entraînent des conclusions différentes et incompatibles, les trois réciproques sont vraies ; c'est-à-dire que :

$$\text{Si } C = B, \text{ il faut que } AB = AC;$$
$$\text{Si } C > B, \text{ il faut que } AB > AC;$$
$$\text{Si } B > C, \text{ il faut que } AC > AB.$$

Ainsi, *dans tout triangle, à des angles égaux sont opposés des côtés égaux, et à un plus grand angle est opposé un plus grand côté.*

52. ***Théorème.*** — *Dans tout triangle un côté quelconque est plus petit que la somme des deux autres et plus grand que leur différence.*

Soit ABC un triangle (fig. 37) ; il faut prouver que le côté BC, par exemple, est plus petit que la somme des deux autres. Pour cela, prolongeons BA d'une longueur AD égale à AC et traçons CD. Le triangle ACD est isoscèle ; l'angle D est donc égal à l'angle ACD et, par suite, plus petit que l'angle BCD. Donc [51], dans le triangle BCD, le côté BC opposé à l'angle D est moindre que le côté BD opposé à l'angle BCD ; c'est-à-dire que

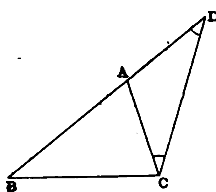


Fig. 37.

$$BC < AB + AC.$$

On démontrerait de même que

$$AB < BC + AC,$$
$$AC < AB + BC.$$

Des trois inégalités précédentes, on déduit que chaque côté du triangle est plus grand que la différence des deux

autres ; par exemple, AC > BC — AB, en supposant BC > AB.

Corollaire. — *Une ligne droite* AB (fig. 38) *est plus courte que toute ligne brisée* ACDEB *qui a mêmes extrémités.*

En effet, menons AD et AE. On a

$$AC + CD > AD;$$

d'où, en ajoutant DE aux deux membres,

$$AC + CD + DE > AD + DE > AE;$$

d'où, en ajoutant EB aux deux membres extrêmes,

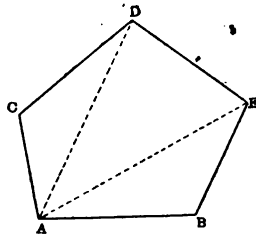


Fig. 38.

$$AC + CD + DE + EB > AE + EB > AB.$$

Remarque. — Nous verrons plus tard ce qu'il faut entendre par *longueur* d'un arc de courbe et nous pourrons en conclure que la longueur d'une ligne droite est plus petite que celle de toute autre ligne ayant mêmes extrémités. C'est ce qu'on énonce en disant :

La ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre.

En raison de cette propriété, la portion de droite qui joint deux points s'appelle *la distance de ces deux points.*

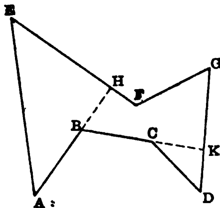


Fig. 39.

53. ***Théorème.*** — *Toute brisée convexe est moindre qu'une brisée quelconque qui l'enveloppe et qui a mêmes extrémités.*

Soit AEFGD (fig. 39) une brisée quelconque, convexe

ou non, qui entoure la brisée convexe ABCD et qui a mêmes extrémités A et D. Prolongeons AB et BC jusqu'aux points de rencontre H et K avec la brisée enveloppante. On a [52]

$$AB + BH < AE + EH,$$
$$BC + CK < BH + HF + FG + GK,$$
$$CD < CK + KD.$$

D'où, en ajoutant membre à membre et supprimant les termes communs,

$$AB + BC + CD < AE + EH + HF + FG + GK + KD,$$

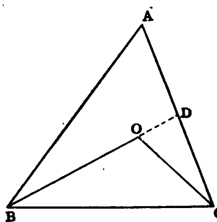


Fig. 40.

ou

$$AB + BC + CD < AE + EF + FG + GD.$$

Corollaires. — I. — *Si* O *est un point intérieur à un triangle* ABC (fig. 40), *on a*

$$BO + OC < BA + AC.$$

De plus, l'angle BOC est plus grand que l'angle BAC ; car, en appelant D le point de rencontre de OB avec AC, on a $\widehat{BOC} > \widehat{BDC} > \widehat{BAC}$.

II. — *Le périmètre d'un polygone convexe* ABCDE (fig. 41) *est moindre que celui d'un polygone quelconque* FGHKLM *qui l'enveloppe.*

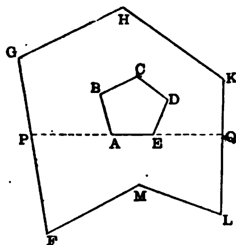


Fig. 41.

Prolongeons le côté AE jusqu'aux points de rencontre P et Q avec le polygone enveloppant. On a :

$$AB + BC + CD + DE < AP + PG + GH + HK + KQ + QE,$$
$$PA + AE + EQ < PF + FM + ML + LQ;$$

d'où, en ajoutant membre à membre et simplifiant,

$$AB + BC + CD + DE + EA < FG + GH + HK + KL + LM + MF.$$

EXERCICES

1. Soit ABC un triangle isoscèle, dans lequel AB = AC ; et soit D un point situé sur AB ou sur son prolongement. Prouver que DB est plus grand ou plus petit que DC selon que les points B, D sont, ou non, de part et d'autre de A.

2. Si, dans un triangle ABC, rectangle en A, on mène par A une droite faisant avec AB un angle égal à B et si D est le point où cette droite rencontre l'hypoténuse, les deux triangles ABD et ADC sont isoscèles; le point D est le milieu de l'hypoténuse et la médiane AD est la moitié de l'hypoténuse.

En déduire que, si, dans un triangle rectangle, un des côtés est la moitié de l'hypoténuse, l'angle opposé à ce côté est égal à 30° ; et réciproquement.

3. La somme des droites qui joignent les sommets d'un triangle à un point intérieur est moindre que le périmètre, mais plus grande que la moitié du périmètre du triangle.

4. Dans le triangle ABC, mener une sécante DE parallèle à une droite donnée Δ, et telle que la partie DE comprise entre les côtés AB et AC soit égale à BD + CE.

— Si on mène par B et C des droites BB′, CC′ parallèles à Δ, la droite demandée passe par le point d'intersection des bissectrices des angles ABB′, ACC′.

Comparer les segments déterminés par ces bissectrices sur la parallèle à Δ menée par A.

Examiner le cas particulier où Δ est parallèle à BC.

5. Soient ABC un triangle ; O le point de rencontre des bissectrices intérieures des angles B et C; O′ celui des bissectrices extérieures de ces mêmes angles ; O″ celui de la bissectrice intérieure de l'angle B avec la bissectrice extérieure de l'angle C. Démontrer que $\widehat{BO''C} = \frac{A}{2}$, et en déduire que

$$\widehat{BOC} = 90^\circ + \frac{A}{2}, \qquad \widehat{BO'C} = 90^\circ - \frac{A}{2}.$$

6. Dans tout triangle ABC, l'angle formé par la hauteur et la bissectrice issues du point A est égal à la demi-différence des deux angles B et C.

7. Par le sommet A d'un triangle ABC, on mène deux droites rencontrant BC en D et E et telles que les angles BAD, CAE soient respectivement égaux aux angles C, B. Prouver que AD = AE.

CHAPITRE IV

PERPENDICULAIRES ET OBLIQUES

54. ***Théorème.*** — *Par un point* C *on peut mener une perpendiculaire à une droite* AB *et une seule.*

1° *Le point* C *est sur la droite donnée* (fig. 42). Décrivons de C comme centre, avec un rayon arbitraire, un cercle qui coupe la droite donnée aux deux points A et B. Soit D le milieu de la demi-circonférence AFB ; l'arc AD est le quart de la circonférence ; donc l'angle ACD est droit et la droite CD est perpendiculaire à AB au point C. D'ailleurs toute autre droite CE passant par le point C fera avec CA un angle plus grand ou plus petit qu'un droit, et, par conséquent, ne lui sera pas perpendiculaire.

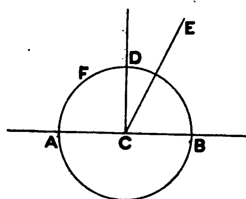


Fig. 42.

2° *Le point* C *est hors de la droite* AB (fig. 43). Joignons le point C à un point quelconque A de la droite AB ; puis menons par A, de l'autre côté de AB, une droite AD faisant avec AB un angle égal à BAC, et prenons sur cette droite une longueur AD égale à AC. Dans le triangle isoscèle CAD, la droite AB, qui est bis-

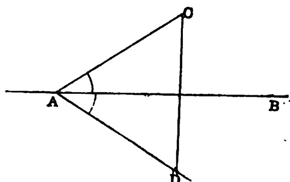
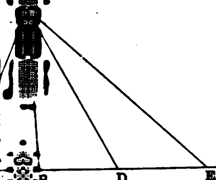


Fig. 43.

… diculaire sur la
… e demandée. Il
… diculaires à une
… , Corollaire II].
… utre quand elle

… *ris hors d'une*
… *iculaire* AB *et*



… g. 44.

… *re, celle qui s'en*

… ngle droit ABC
… nc [51]

… lement écartées
… -dire telles que
… égales, il n'y a
… de l'égalité des
… end la direction
… oint C tombe au

… également écar-
… tuées du même

côté de cette perpendiculaire. Si nous supposons BE>BD, dans le triangle ADE, l'angle obtus ADE est plus grand que l'angle aigu AED. Donc [51]

$$AE > AD.$$

Enfin, si l'on considère deux obliques AC et AE situées de part et d'autre de la perpendiculaire et si l'on suppose, par exemple, BE > BC, on pourra prendre sur BE une longueur BD égale à BC; et alors on aura, d'après ce qui précède,

$$AC = AD, \quad AD < AE.$$

Par conséquent, AC < AE.

Les réciproques sont vraies [19].

56. Corollaire. — *D'un point pris hors d'une droite, on ne peut mener à cette droite plus de deux obliques égales.* Autrement dit, *un cercle ne peut rencontrer une droite en plus de deux points.*

La perpendiculaire abaissée d'un point sur une droite est la plus courte de toutes les lignes qui joignent ce point à un point de la droite; c'est pourquoi elle s'appelle la *distance* du point à la droite.

57. ***Définition.*** — On appelle *lieu géométrique* l'ensemble des points jouissant d'une propriété commune.

Théorème. — *Le lieu des points équidistants de deux points donnés* A *et* B (fig. 45) *est la perpendiculaire au milieu de la droite qui joint ces deux points.*

1° Soit M un point équidistant de A et de B ; abaissons de ce point MP perpendiculaire sur AB. Puisque les obliques MA, MB sont égales, elles s'écartent égale-

ment du pied de la perpendiculaire; donc le point P est le milieu de AB et le point M appartient à la perpendiculaire au milieu de AB.

2° Réciproquement, tout point de la perpendiculaire au milieu de AB est équidistant de A et de B. Car, soit M un point de cette perpendiculaire : les obliques MA et MB sont égales, comme s'écartant également du pied de la perpendiculaire.

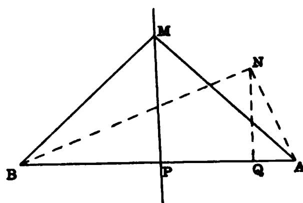


Fig. 45.

Remarque. — Tout point N situé par rapport à la perpendiculaire au milieu de AB du même côté que A est plus rapproché de A que de B. Car si on abaisse NQ perpendiculaire sur AB, on a $QA < QB$; par suite, $NA < NB$.

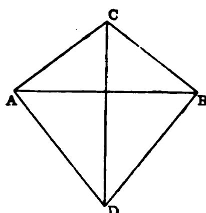


Fig. 46.

Corollaire. — *Si deux points* C *et* D (fig. 46) *sont équidistants de deux points* A *et* B, *la droite* CD *est perpendiculaire au milieu de* AB; car, ces deux points C et D étant sur la perpendiculaire élevée au milieu de AB, cette perpendiculaire n'est autre que la droite CD elle-même.

SYMÉTRIE

58. On dit que deux points A et A′ (fig. 47) sont *symétriques par rapport à un point* O, quand le point O est le milieu de la droite AA′.

On dit que deux points A et A′ (fig. 48) sont *symé-*

triques par rapport à une droite XY, quand la droite XY est perpendiculaire sur le milieu de AA′.

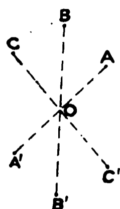


Fig. 47.

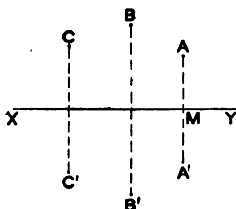


Fig. 48.

On dit que deux figures ABC..., A′B′C′..., sont symétriques par rapport à un point O (fig. 47), ou par rapport à une droite XY (fig. 48), quand les points de l'une sont symétriques des points de l'autre par rapport à ce point O, ou par rapport à cette droite XY.

59. **Théorème.** — *Deux figures planes symétriques par rapport à un point ou à une droite sont égales.*

1° Soient ABC... et A′B′C′... (fig. 47), deux figures symétriques par rapport au point O, de sorte que le point O est le milieu de AA′, de BB′, etc. Faisons tourner la première figure de 180° autour du point O : le point A vient coïncider avec le point A′, le point B avec le point B′, etc. Donc les deux figures sont superposables.

Le point O s'appelle le *centre de symétrie* des deux figures.

2° Soient ABC... et A′B′C′... (fig. 48) deux figures symétriques par rapport à une droite XY, de sorte que XY est perpendiculaire au milieu de AA′, de BB′, etc. Faisons tourner le plan autour de XY comme charnière jusqu'à ce qu'il revienne coïncider avec sa position primitive. L'angle droit XMA vient coïncider avec l'angle

droit XMA′ et comme MA = MA′, le point A tombe en A′ ; de même B en B′, etc. Donc la figure ABC... coïncide avec la figure A′B′C′...

La droite XY s'appelle *l'axe de symétrie* des deux figures.

Il est essentiel de remarquer que deux figures symétriques par rapport à un point peuvent être appliquées l'une sur l'autre *sans qu'on ait besoin de les faire sortir du plan;* c'est pourquoi on dit qu'elles sont *directement superposables*. Au contraire, pour faire coïncider deux figures symétriques par rapport à une droite, *il faut retourner l'une d'elles :* c'est ce qu'on exprime en disant qu'elles sont *inversement superposables*.

Nous verrons dans la seconde partie ce qu'il faut entendre par *rotation autour d'un axe*. La symétrie par rapport à une droite, dans le plan ou dans l'espace, est une rotation de 180° autour de cette droite. La symétrie *dans le plan*, par rapport à un point, est une rotation de 180° autour d'une droite perpendiculaire au plan et passant par ce point; il n'en est pas de même dans l'espace, et deux figures non planes symétriques par rapport à un point ne sont pas, en général, superposables.

Corollaire. — *La figure symétrique d'une droite par rapport à un centre ou par rapport à un axe est une droite.*

Deux droites symétriques par rapport à un axe rencontrent cet axe en un même point, ou sont toutes deux parallèles à cet axe.

EXERCICES

1. Soient A et B deux points; A′ le symétrique de A par rapport à XY; C le point de rencontre de A′B avec XY; D un autre point quelconque de XY.

Si A et B sont d'un même côté de XY, on a

$$AC + CB < AD + DB;$$

par suite, ACB est le plus court des chemins qui vont de A en B, en touchant la droite XY.

Si A et B sont de part et d'autre de XY, on a

$$|AC - CB| > |AD - DB|.$$

2. Etant donnés deux points A et B situés dans un angle, trouver le plus court des chemins qui vont de A en B, en touchant les deux côtés de l'angle.

3. Etant donnés deux points A et B intérieurs à un triangle, trouver le plus court des chemins qui vont de A en B, en touchant les trois côtés du triangle.

4. Si d'un point A on mène à une droite une perpendiculaire AB et trois obliques AC, AD, AE telles que les angles CAD, DAE soient égaux, démontrer que CD < DE si BC < BE.

5. Dans tout triangle, une bissectrice est toujours comprise entre la médiane et la hauteur issues du même sommet.

CHAPITRE V

CAS D'ÉGALITÉ DES TRIANGLES

60. Rappelons d'abord [4] que deux triangles ABC, A′B′C′ sont égaux, par définition, quand on peut les appliquer l'un sur l'autre de façon que le point A′ coïncide avec le point A, le point B′ avec le point B et le point C′ avec le point C. Ainsi, l'égalité de ces deux triangles implique six conditions :

$$\widehat{A} = \widehat{A'}, \quad \widehat{B} = \widehat{B'}, \quad \widehat{C} = \widehat{C'};$$
$$BC = B'C', \quad CA = C'A', \quad AB = A'B'.$$

Nous allons voir que trois de ces conditions convenablement choisies entraînent les trois autres.

61. ***Théorème.*** — *Deux triangles* ABC, A'B'C' (fig. 49) *sont égaux :*

1° *Quand ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun ;*

2° *Quand ils ont un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun ;*

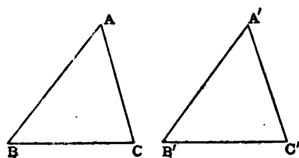


Fig. 49.

3° *Quand ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun.*

En effet :

1° Supposons BC = B'C', $\widehat{B} = \widehat{B'}$, $\widehat{C} = \widehat{C'}$. Portons le triangle A'B'C' sur le triangle ABC de manière que B'C' coïncide avec son égal BC, le point B' avec le point B et le point C' avec le point C. L'angle B' étant égal à l'angle B, le côté B'A' prendra la direction de BA et le point A' tombera quelque part sur BA. Pareillement, à cause de l'égalité des angles C et C', le côté C'A' prendra la direction de CA et le point A' tombera quelque part sur CA. Mais alors le point A', devant tomber à la fois sur AB et sur AC, viendra se placer à l'intersection de ces deux droites, c'est-à-dire en A. Les triangles coïncideront, donc ils sont égaux.

2° Supposons A = A', AB = A'B', AC = A'C'.

Portons le triangle A'B'C' sur le triangle ABC, de manière que l'angle A' coïncide avec son égal A, en ayant soin que le côté A'B' prenne la direction de AB et A'C' celle de AC; comme A'B' = AB et A'C' = AC, le point B' viendra en B et le point C' en C; donc les deux triangles coïncideront.

3° Supposons BC = B′C′, CA = C′A′, AB = A′B′ (fig. 50).

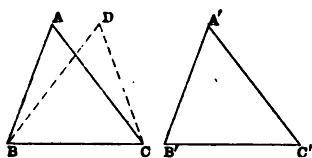


Fig. 50.

Portons le triangle A′B′C′ sur le triangle ABC, de manière que le côté B′C′ coïncide avec son égal BC, le point B′ avec le point B, le point C′ avec le point C, et de manière que le point A′ tombe du même côté que A par rapport à BC. Il s'agit de prouver que le point A′ tombera en A. En effet, s'il tombait en un point D différent de A, on aurait DB = AB et DC = AC ; par conséquent [57, corollaire], BC serait perpendiculaire au milieu de AD, ce qui est impossible, *puisque les points* A *et* D *sont d'un même côté de* BC. Donc le point A′ tombera en A et les deux triangles coïncideront.

CAS D'ÉGALITÉ DES TRIANGLES RECTANGLES

62. ***Théorème.*** — *Deux triangles* ABC, A′B′C′ (fig. 51) *rectangles en* A *et en* A′ *sont égaux :*

1° *Quand ils ont l'hypoténuse égale et un angle aigu égal ;*

2° *Quand ils ont l'hypoténuse égale et un côté de l'angle droit égal.*

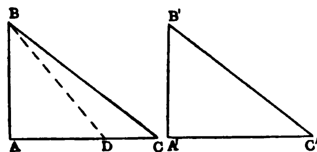


Fig. 51.

En effet :

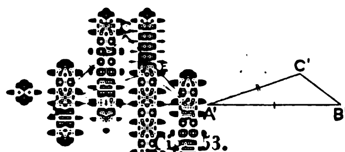
1° Supposons BC = B′C′, C = C′.

Portons le triangle A′B′C′ sur le triangle ABC, de manière que l'angle C′ coïncide avec l'angle C, que le côté C′A′ prenne la direction de CA et le côté C′B′ celle de CB. Comme C′B′ = CB, le point B′ viendra en B et le

, par suite,
eut abaisser
nc les deux

BC, de ma-
gle droit A,
et A′C′ celle
ra en B. Le
un point D
AC au delà
également du
ales [55], ce
B′C′ = BC.

ABC, A′B′C′
à chacun :



33.

x, les côtés

côtés oppo-

postulat d'Eu-
que, si C = C′
[61, 1°].

sés le sont aussi et au plus grand angle est opposé le plus grand côté.

La première partie a déjà été démontrée [61,2°].

Supposons donc $A > A'$ et démontrons que $BC > B'C'$. Pour cela, portons le triangle A'B'C' sur le triangle ABC de manière que A'B' coïncide avec AB et que le côté A'C' tombe en AD à l'intérieur de l'angle BAC, ce qui est possible, puisque $A > A'$. La droite AD, prolongée s'il le faut, rencontre BC en un point E.

On a

$$BE + ED > BD.$$

Mais $AD = AC$; donc ED est égal à la différence entre les côtés AE et AC du triangle ACE et, par suite, moindre que le troisième côté EC :

$$ED < EC.$$

Donc on a, à plus forte raison,

$$BE + EC > BD,$$

ou

$$BC > B'C'.$$

Il peut arriver (fig. 54) que le point D coïncide avec le point E; dans ce cas on a immédiatement $BC > BD$ ou $BC > B'C'$.

Les réciproques sont vraies [19]. Donc

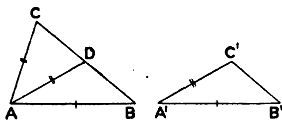


Fig. 54.

Si deux triangles ABC, A'B'C' *ont deux côtés égaux chacun à chacun :* $AB = A'B'$, $AC = A'C'$,

1° *Si les troisièmes côtés* BC, B'C' *sont égaux, les angles opposés le sont aussi;* et alors les triangles sont égaux, ce qui démontre à nouveau l'égalité de deux triangles qui ont les trois côtés égaux chacun à chacun;

2° *Si les troisièmes côtés sont inégaux, les angles opposés le sont aussi et au plus grand côté est opposé le plus grand angle.*

64. **Théorème.** — *Le lieu des points situés dans un angle* BAC (fig. 55), *à égale distance des côtés de cet angle, est la bissectrice.*

1° Soit M un point dont les distances MD, ME aux deux côtés de l'angle sont égales. Les triangles rectangles MAD, MAE sont égaux, comme ayant l'hypoténuse commune et un côté de l'angle droit égal; donc les angles MAD, MAE sont égaux, et, si le point M est dans l'angle BAC, il est sur la bissectrice AX de cet angle.

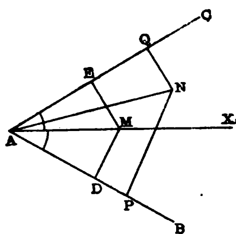


Fig. 55.

2° Soit M un point de cette bissectrice; les angles MAB, MAC sont égaux. Donc, si on abaisse MD, ME perpendiculaires sur AB, AC, les triangles rectangles MAD, MAE seront égaux comme ayant l'hypoténuse commune et un angle aigu égal. Donc MD = ME.

Il importe de remarquer que tout point N (fig. 56) situé dans l'angle CAX est plus rapproché de AC que de AB. Car menons par le point N la parallèle à la bissectrice AX, qui rencontre AC en A′, puis par A′ la parallèle à AB, qui rencontre NP en P′. On a

$$NQ = NP' < NP.$$

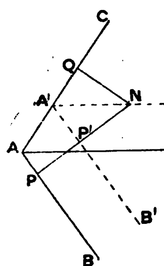


Fig. 56.

Corollaire. — *Le lieu des points du plan équidistants de deux droites qui se coupent se com-*

pose des deux droites rectangulaires qui sont les bissectrices des quatre angles formés par ces deux droites.

EXERCICES

1. Si l'on prend sur l'un des côtés d'un angle XOY des longueurs arbitraires OA, OB et sur l'autre des longueurs OA′, OB′ respectivement égales aux premières, les droites AB′, BA′ se coupent sur la bissectrice de l'angle.

2. Dans tout triangle, une médiane est moindre que la demi-somme des côtés qui la comprennent.

— On considérera le triangle BCE (fig. 33) obtenu en prolongeant la médiane BM d'une longueur égale à elle-même.

3. Dans tout triangle à un plus grand côté est opposée une plus petite médiane et réciproquement.

— Dans le triangle ABC, supposons AB > AC, prolongeons la médiane BD d'une longueur DF = BD, la médiane CE d'une longueur EG = CE ; puis prenons sur AB une longueur AH = AC. L'angle AHF est aigu ; donc

$$BF > FH > CG.$$

4. Un triangle est isoscèle quand l'une des médianes est en même temps hauteur et bissectrice.

5. Quand deux hauteurs d'un triangle sont égales, le triangle est isoscèle.

En général, dans tout triangle, à un plus grand côté est opposée une plus petite hauteur.

6. Deux polygones de n côtés sont égaux :

1° Quand ils ont $n-2$ côtés consécutifs égaux et adjacents à $n-1$ angles égaux chacun à chacun et disposés dans le même ordre ;

2° Quand ils ont $n-1$ côtés égaux comprenant $n-2$ angles égaux chacun à chacun et disposés dans le même ordre ;

3° Quand ils ont n côtés égaux et $n-3$ angles égaux chacun et disposés dans le même ordre.

— Dans les deux premiers cas, il n'y a qu'à porter les deux polygones l'un sur l'autre. Dans le troisième, en joignant les sommets des trois angles restants, on partage les polygones en polygones partiels égaux chacun à chacun.

On voit que l'égalité de deux polygones de n côtés exige $2n-3$ conditions.

7. Deux polygones d'un même nombre de côtés sont égaux quand

ils ont un côté égal et que toutes les droites joignant les extrémités de ce côté aux autres sommets sont égales chacune à chacune et disposées dans le même ordre.

8. Le nombre des diagonales d'un polygone de n côtés est $\frac{n(n-3)}{2}$.

9. Dans tout quadrilatère convexe, le périmètre est plus grand que la somme des diagonales et moindre que le double de cette somme.

10. Dans tout quadrilatère croisé, la différence de deux angles opposés est égale à la différence des deux autres.

11. Dans tout quadrilatère convexe, 1° les bissectrices de deux angles consécutifs se coupent sous un angle égal à la demi-somme des deux autres; 2° les bissectrices de deux angles opposés se coupent sous un angle égal à la demi-différence des deux autres.

12. Dans un quadrilatère ABCD ayant un angle rentrant C, la somme des trois autres angles est égale à BCD; les bissectrices des angles B et D se coupent sous un angle égal à la demi-somme des angles A et BCD. — En déduire que, dans tout quadrilatère convexe, les bissectrices des angles formés par les côtés opposés se coupent sous un angle égal à la demi-somme de deux angles opposés.

CHAPITRE VI

PARALLÉLOGRAMMES

65. On appelle *parallélogramme* un quadrilatère ABCD (fig. 60), dont les côtés opposés sont parallèles

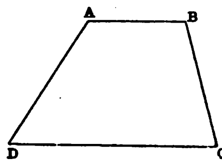


Fig. 57.

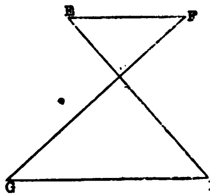


Fig. 58.

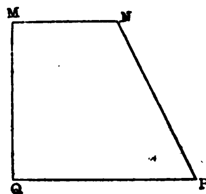


Fig. 59.

deux à deux. Un parallélogramme est toujours convexe.

On appelle *trapèze* un quadrilatère qui a seulement deux côtés opposés parallèles (fig. 57, 58, 59). Les côtés parallèles s'appellent les *bases*. Un trapèze est *isoscèle*, si les côtés opposés non parallèles sont égaux ; *rectangle*, si l'un des côtés non parallèles est perpendiculaire aux bases (fig. 59).

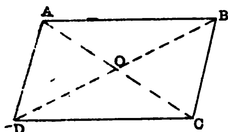


Fig. 60.

Un trapèze peut être *convexe* (fig. 57) ou *croisé* (fig. 58).

66. ***Théorème.*** — *Dans tout parallélogramme* ABCD (fig. 60), *les côtés opposés sont égaux ainsi que les angles opposés et les diagonales se coupent en parties égales.*

1° Les triangles ABC, CDA sont égaux comme ayant un côté commun adjacent à deux angles égaux chacun à chacun : $\widehat{BAC} = \widehat{DCA}$ comme alternes internes et $\widehat{ACB} = \widehat{CAD}$ pour la même raison. Donc $AB = CD$, $BC = DA$ et $\widehat{ABC} = \widehat{CDA}$.

On démontre de même que $\widehat{BAD} = \widehat{BCD}$. D'ailleurs, l'égalité de ces deux angles résulte de ce qu'ils ont les côtés parallèles et de sens contraires [44].

2° Soit O le point de rencontre des diagonales ; les triangles AOB, COD sont égaux comme ayant un côté égal $AB = CD$ [1°] adjacent à deux angles égaux chacun à chacun : $\widehat{OAB} = \widehat{OCD}$ comme alternes internes et $\widehat{OBA} = \widehat{ODC}$ pour la même raison. Donc $OA = OC$, $OB = OD$, c'est-à-dire que les diagonales AC et BD se coupent en parties égales.

67. ***Théorème.*** — *Un quadrilatère* ABCD *est un parallélogramme :*

1° *S'il est convexe et si les côtés opposés sont égaux deux à deux ;*

2° *S'il est convexe et si deux côtés opposés sont égaux et parallèles ;*

3° *Si les diagonales se coupent en parties égales.*

En effet :

1° Supposons que le quadrilatère ABCD (fig. 61) soit convexe et que AB = CD, BC = AD. Les triangles ABC, CDA sont égaux comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun ; donc les angles BAC et DCA sont égaux, ce qui prouve le parallélisme des droites AB et CD. Pareillement, les droites BC et AD sont parallèles à cause de l'égalité des angles BCA et DAC. Donc le quadrilatère est un parallélogramme.

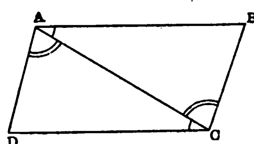


Fig. 61.

2° Supposons que le quadrilatère ABCD (fig. 61) soit convexe et que les côtés AB et CD soient égaux et parallèles. Les triangles ABC et CDA sont égaux comme ayant un angle égal : $\widehat{BAC} = \widehat{DCA}$ comme alternes internes, compris entre côtés égaux chacun à chacun. Donc les angles BCA et DAC sont égaux, ce qui prouve le parallélisme des droites BC et AD. Donc le quadrilatère est un parallélogramme.

D'ailleurs, pour que le quadrilatère ABCD soit convexe, il suffit que les côtés AB et DC soient parallèles et *de même sens.*

3° Supposons que les diagonales AC et BD (fig. 62) se coupent en parties égales : OA = OC, OB = OD. Comme les angles AOB, COD opposés par le sommet sont égaux, les triangles AOB, COD sont égaux comme ayant un

angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun. Donc $\widehat{OAB} = \widehat{OCD}$, ce qui prouve le parallélisme des droites AB et CD. On prouverait de même que AD et BC sont parallèles. Donc le quadrilatère est un parallélogramme.

68. On dit qu'un point est *centre* d'une figure quand les points de la figure sont deux à deux symétriques par rapport à ce point.

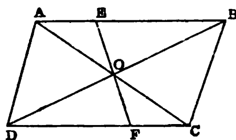


Fig. 62.

Le point de rencontre O (fig. 62) *des diagonales est le centre du parallélogramme.*

Car, soit EF une sécante passant par ce point ; les triangles OAE, OCF sont égaux comme ayant un côté égal, OA = OC, adjacent à deux angles égaux chacun à chacun. Donc OE = OF et les points E et F sont symétriques par rapport au point O.

Remarquons que AE = CF ; donc, si E est le milieu de AB, F sera aussi le milieu de CD. Par conséquent,

Les droites qui joignent les milieux des côtés opposés d'un parallélogramme passent par le centre.

69. On appelle *rectangle* un quadrilatère convexe ABCD (fig. 63) dont les quatre angles sont égaux et, par conséquent, droits, puisque la somme des angles d'un quadrilatère est égale à quatre angles droits.

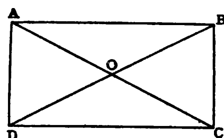


Fig. 63.

Tout rectangle ABCD *est un parallélogramme ;* car deux côtés opposés, par exemple, AD et BC, sont parallèles comme étant perpendiculaires à la même droite CD.

Il en résulte que les côtés opposés d'un rectangle sont égaux : par exemple, AD = BC. Par conséquent,

Deux droites parallèles AB *et* CD *sont partout également distantes.*

70. ***Théorème.*** — *Les diagonales d'un rectangle* ABCD *sont égales.* Car les triangles ADC, BCD sont égaux comme ayant un angle égal : $\widehat{ADC} = \widehat{BCD}$ comme droits, compris entre côtés égaux chacun à chacun. Donc AC = BD.

Réciproque. — *Un parallélogramme* ABCD *dont les diagonales sont égales est un rectangle.*

Car, si AC = BD, les deux triangles ADC, BCD sont égaux comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun. Donc les angles ADC et BCD sont égaux, et, comme ils sont supplémentaires, chacun d'eux vaut un droit. Donc ce parallélogramme est un rectangle.

71. Corollaire. — *Dans tout triangle rectangle* ABC, *la médiane* BO *issue du sommet de l'angle droit est moitié de l'hypoténuse, et réciproquement.*

72. On appelle *losange* un quadrilatère convexe ABCD (fig. 64) dont les quatre côtés sont égaux.

Un losange est un parallélogramme [67, 1°].

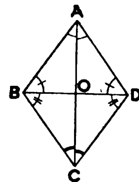


Fig. 64.

Théorème. — *Les diagonales d'un losange se coupent à angle droit et sont les bissectrices des angles du losange.*

Car les points A et C étant équidistants de B et de D, la droite AC est perpendiculaire au milieu O

de BD. Mais alors les triangles rectangles AOB, AOD sont égaux; donc AC est bissectrice de l'angle A.

Réciproques. — 1° *Un quadrilatère* ABCD *dont les diagonales sont perpendiculaires en leurs milieux est un losange.*

Car AB = BC, BC = CD, CD = DA, comme obliques s'écartant également du pied de la perpendiculaire.

2° *Un quadrilatère* ABCD *est un losange quand les diagonales sont bissectrices de trois des angles du quadrilatère.*

Car, si AC est bissectrice des deux angles A et C, les triangles ABC, ADC sont égaux comme ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun; donc AB = AD, CB = CD.

Par conséquent, les angles ABD, ADB sont égaux, ainsi que les angles CBD, CDB; si donc BD est bissectrice de l'angle ABC, ces quatre angles sont égaux et les triangles isoscèles ABD, CBD sont égaux comme ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux; d'où

$$AB = BC = CD = DA.$$

73. On appelle *carré* un quadrilatère convexe dont les quatre côtés sont égaux et dont les quatre angles sont égaux et, par conséquent, droits.

Un carré est à la fois un rectangle et un losange. Par conséquent,

Les diagonales d'un carré sont égales, elles se coupent à angle droit et sont bissectrices des angles du carré.

EXERCICES

1. Dans un triangle ABC (fig. 65) la droite DE qui joint les

milieux de deux côtés, AB et AC, est parallèle au troisième côté et égale à sa moitié.

— En effet, le point E est le centre du parallélogramme ABCF; la droite DE passe par le milieu G de CF. Donc BD = CG et BDGC est un parallélogramme, etc.

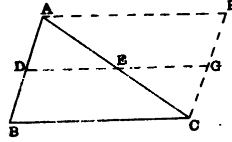


Fig. 65.

2. Dans un triangle ABC, la parallèle au côté BC menée par le milieu du côté AB passe par le milieu du troisième côté.

En général, si des parallèles interceptent sur une droite des longueurs égales, elles interceptent aussi des longueurs égales sur toute autre droite.

3. Dans tout triangle, les trois médianes concourent en un même point, qui est au tiers de chacune d'elles à partir du côté opposé.

— Car, soit O le point de concours des deux médianes BE, CF d'un triangle ABC; menons par A la parallèle à BE, qui rencontre CF en un point G. On voit aisément que le point O est le milieu de CG et F le milieu de OG. Donc OF est le tiers de CF, etc.

Nous donnerons plus loin une autre démonstration.

Il est aisé d'en déduire que, dans tout triangle, à un plus grand côté est opposée une plus petite médiane. Car soit O le point de concours des trois médianes AD, BE, CF d'un triangle ABC ; les deux points A et O sont situés du même côté de la perpendiculaire au milieu D de BC. Donc, si AB > AC, il en résulte que OB > OC, et, par suite,

$$BE > CF\,;$$
$$\text{car } BE = \frac{3}{2}\,BO \text{ et } CF = \frac{3}{2}\,CO.$$

(Voir p. 42, Ex. 3, une autre démonstration indépendante du postulat d'Euclide).

4. On peut toujours construire un triangle ayant pour côtés les médianes d'un triangle donné.

— Il suffit de tracer la médiane CD et de joindre les points C et D au milieu de AF (fig. 65).

5. Dans tout trapèze, la droite qui joint les milieux des côtés non parallèles est parallèle aux bases, passe par les milieux des diagonales et est égale à la demi-somme ou à la demi-différence des bases, selon que le trapèze est convexe ou croisé.

6. Les droites qui joignent les milieux des côtés consécutifs d'un quadrilatère forment un parallélogramme dont les diagonales se rencontrent au milieu de la droite qui joint les milieux des diagonales du quadrilatère.

7. Le lieu des points équidistants de deux droites parallèles est une droite parallèle aux deux premières.

8. Les bissectrices des angles d'un quadrilatère convexe forment un quadrilatère dont les angles opposés sont supplémentaires. Si le premier quadrilatère est un parallélogramme, le second est un rectangle dont les diagonales sont parallèles aux côtés du parallélogramme et égales à leur différence. Si le premier quadrilatère est un rectangle, le second est un carré.

9. Dans tout trapèze isoscèle, les angles opposés sont supplémentaires.

10. Les parallélogrammes inscrits dans un parallélogramme donné (c'est-à-dire ayant leurs sommets sur les côtés de ce parallélogramme ou sur leurs prolongements), ont même centre que ce parallélogramme.

11. Prouver qu'on peut inscrire dans un rectangle des parallélogrammes dont les côtés soient parallèles aux diagonales du rectangle, et que tous ces parallélogrammes ont même périmètre.

12. Si par un point de la base d'un triangle isoscèle on mène des parallèles aux deux autres côtés, le périmètre du parallélogramme ainsi formé reste constant quand le point se déplace sur la base. Examiner le cas où le point est sur le prolongement de la base.

13. Par un point M de la base d'un triangle, on mène des parallèles aux deux autres côtés. Trouver le lieu décrit par le centre du parallélogramme ainsi formé, quand le point M se déplace sur la base. — Une droite parallèle à la base.

14. Dans tout triangle isoscèle, la somme des distances d'un point de la base aux deux autres côtés reste constante quand le point se déplace sur la base. — Si le point se déplace sur le prolongement de la base, c'est la différence des distances qui reste constante.

15. Trouver le lieu des points tels que la somme (ou la différence) de leurs distances à deux droites données soit égale à une longueur donnée.

16. Dans un triangle équilatéral la somme des perpendiculaires abaissées d'un point intérieur au triangle sur les trois côtés est constante.

17. Soient BD et CE, deux bissectrices d'un triangle ABC (fig. 66), démontrer que, si $AB > AC$, on a

$$BE > ED > DC.$$

Fig. 66.

— En menant par D la parallèle à BC, qui rencontre AB en F, il est aisé de voir que le point F est plus rapproché de BC que de AC. Donc ce point F est situé entre B et E ; par suite

$$\widehat{EDB} > \widehat{DBE}, \text{ etc.}$$

18. Dans tout triangle ABC, à un plus grand côté est opposée une plus petite bissectrice.

— Conservons les notations et les hypothèses de l'exercice précédent. Soit O le milieu de DE ; prolongeons BO d'une longueur OL égale à BO. Dans le triangle CEL, on a $\widehat{ELD} = \widehat{EBD} < \widehat{ECD}$, puis $\widehat{DLC} < \widehat{DCL}$, car DL = BE > DC [Ex. 17] ; par conséquent, $\widehat{ELC} < \widehat{ECL}$, etc.

19. Dans tout triangle rectangle, la différence des angles aigus est égale à l'angle formé par la hauteur et la médiane issues du sommet de l'angle droit.

20. Dans un triangle, un angle est *droit, obtus* ou *aigu* selon que la médiane issue du sommet de cet angle est égale, inférieure ou supérieure à la moitié du côté opposé [71].

21. Deux trapèzes sont égaux quand leurs bases et leurs côtés non parallèles sont égaux chacun à chacun et disposés dans le même ordre.

— Car, en menant dans chaque trapèze par l'extrémité de l'un des côtés non parallèles une parallèle à l'autre, on forme deux triangles égaux, et si on fait coïncider ces triangles, les trapèzes coïncideront.

22. Deux parallélogrammes sont égaux quand ils ont un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun.

23. Sur un billard rectangulaire on lance une bille parallèlement à une diagonale. Prouver qu'après deux réflexions elle courra parallèlement à cette diagonale et qu'après quatre réflexions elle repassera par le point de départ.

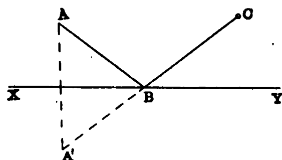


Fig. 67.

— On admet que les chemins suivis par la bille avant et après avoir touché une bande sont également inclinés sur cette bande ; par conséquent si la bille part de A (fig. 67), touche la bande XY en B et se réfléchit suivant BC, le prolongement de BC passe par le point A' symétrique de A par rapport à XY.

24. Sur un billard rectangulaire, on donne deux billes A et B. Dans quelle direction faut-il lancer A pour qu'après quatre réflexions elle aille toucher B ?

25. Étant donnés deux points A et B situés de part et d'autre de deux droites parallèles, trouver sur ces parallèles deux points C et D tels que CD soit parallèle à une droite donnée et que le chemin ACDB soit minimum.

— Menez AE égale et parallèle à CD, qui est connue en grandeur

et en direction ; le chemin AEDB équivaut au chemin ACDB. Comme la partie AE est constante, on est ramené à chercher le minimum du chemin EDB.

Généraliser la question en supposant un nombre quelconque de parallèles.

26. Un parallélogramme est un losange quand les diagonales sont perpendiculaires, ou quand l'une des diagonales est bissectrice de l'un des angles du parallélogramme.

27. Un parallélogramme est un carré quand les diagonales sont égales et perpendiculaires entre elles.

LIVRE II

CERCLE

CHAPITRE PREMIER

ARCS ET CORDES D'UN CERCLE

74. **Théorème.** — *Le diamètre est la plus grande des cordes.*

En effet, une corde quelconque AB (fig. 68) est moindre que la somme des deux rayons OA et OB, par suite, moindre qu'un diamètre.

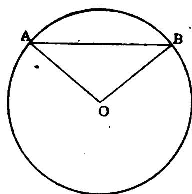


Fig. 68.

75. **Théorème.** — *Dans un même cercle ou dans des cercles égaux :*

1° *Deux arcs égaux sont sous-tendus par des cordes égales ;*

2° *Deux arcs inégaux, moindres qu'une demi-circonférence, sont sous-tendus par des cordes inégales et le plus grand arc est sous-tendu par la plus grande corde.*

1° Si deux arcs d'une même circonférence ou de deux circonférences égales sont égaux, on pourra les faire coïncider, et alors les cordes qui les sous-tendent coïncideront aussi.

2° Soient AB et CD (fig. 69), deux arcs inégaux moindres qu'une demi-circonférence. Si nous supposons le premier plus grand que le second, nous pourrons le décomposer en deux parties, AE et EB, dont l'une AE soit égale à CD ; et

alors, comme les cordes AE et CD sont égales, il suffira de démontrer que la corde AB est plus grande que la corde AE. En effet, si l'on joint le centre O aux points A, E, B, les deux triangles AOB, AOE ont un angle inégal : AOB > AOE, compris entre côtés égaux chacun à chacun ; au plus grand angle est opposé le plus grand côté. Donc, le côté AB est plus grand que le côté AE.

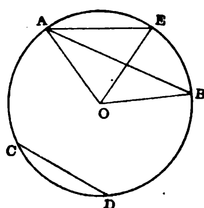


Fig. 69.

Les réciproques sont vraies [19].

Remarque. — Si l'on considère des arcs plus grands qu'une demi-circonférence, la première partie du théorème subsiste, mais il n'en est pas de même de la seconde ; au contraire, c'est le plus grand arc qui est alors soustendu par la plus petite corde.

76. ***Théorème***. — *Le diamètre perpendiculaire à une corde divise cette corde et les deux arcs qu'elle sous-tend en deux parties égales.*

En effet, soit AB (fig. 70), un diamètre perpendiculaire à une corde CD en un point E. Les rayons OC, OD sont deux obliques égales et, par suite, s'écartent également du pied de la perpendiculaire : EC = ED. Donc, si on plie la figure autour du diamètre AB, ED vient coïncider avec EC et les arcs AD, BD viennent coïncider avec les arcs AC, BC.

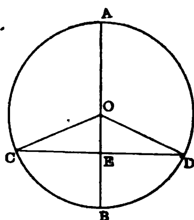


Fig. 70.

Corollaire. — *Le lieu des milieux des cordes parallèles à une direction donnée est le diamètre perpendiculaire à cette direction.*

Remarque. — La droite AB satisfait à cinq conditions : elle est perpendiculaire sur CD, elle passe par le centre, par le milieu de la corde CD et par les milieux des arcs sous-tendus par cette corde. Or deux de ces conditions suffisent pour déterminer une droite. Par conséquent, toute droite, qui satisfait à deux des conditions précédentes, satisfait nécessairement aux trois autres. Ainsi, *la droite, qui joint le milieu d'une corde au centre, est perpendiculaire à cette corde et divise les arcs qu'elle sous-tend en deux parties égales*, etc.

77. ***Théorème.*** — *Dans un même cercle (ou dans des cercles égaux), deux cordes égales sont également distantes du centre, et, de deux cordes inégales, la plus grande est la plus rapprochée du centre.*

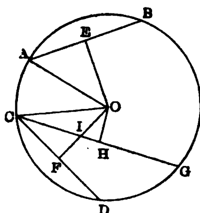


Fig. 71.

1° Soient AB, CD (fig. 71) deux cordes égales ; OE, OF, leurs distances au centre. Les triangles rectangles OAE et OCF ont les hypoténuses OA, OC égales comme rayons et les côtés de l'angle droit AE, CF sont égaux comme moitiés de cordes égales [76] ; ces deux triangles sont donc égaux ; par suite, OE = OF.

2° Soient CG et AB deux cordes inégales ; OH et OE leurs distances au centre. Supposons CG > AB ; il faut prouver que OH < OE. En effet, si l'on considère les deux arcs CG et AB moindres qu'une demi-circonférence, le premier étant plus grand que le second peut être partagé en deux parties, CD et DG, dont l'une CD soit égale à l'arc AB. Les cordes CD et AB sont égales ; donc [1°] la distance OF du centre à la corde CD est

égale à OE ; reste à prouver que OH < OF. Or, le centre O et la corde CD étant de part et d'autre de la droite CG, la droite OF qui joint le centre au milieu de la corde CD est rencontrée par CG en un point I situé entre O et F ; donc OI < OF. Mais la perpendiculaire OH est plus courte que l'oblique OI ; donc, *à fortiori,* OH < OF.

EXERCICES

1. Si on divise la corde AB d'un cercle en trois parties égales, les rayons qui passent par les points de division ne partagent pas l'arc AB en trois parties égales (p. 36, exercice 4).

2. On dit que deux diamètres sont conjugués quand chacun d'eux divise en deux parties égales les cordes parallèles à l'autre. Démontrer que deux diamètres conjugués sont rectangulaires.

3. Les cordes obtenues en joignant un point de la circonférence aux extrémités d'un même diamètre s'appellent *supplémentaires.* Démontrer que deux cordes supplémentaires sont respectivement parallèles à deux diamètres conjugués. En déduire que deux cordes supplémentaires forment un angle droit.

4. La plus petite corde qui passe par un point intérieur à une circonférence est perpendiculaire au diamètre qui passe par ce point.

CHAPITRE II

TANGENTES ET NORMALES AU CERCLE

78. ***Théorème.*** — *Une droite* XY (fig. 72, 73, 74) *rencontre une circonférence* O *en deux points, ou en un point, ou ne la rencontre pas, selon que la distance* OA *de cette droite au centre du cercle est inférieure, égale ou supérieure au rayon.*

1° Si la distance OA est inférieure au rayon (fig. 72), le point A est compris entre les deux points B et C où la droite OA rencontre la circonférence, c'est-à-dire que les points B et C sont *de part et d'autre* de la droite XY. Donc chacune des deux demi-circonférences BDC, BEC rencontre la droite XY au moins en un point.

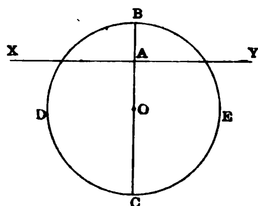


Fig. 72.

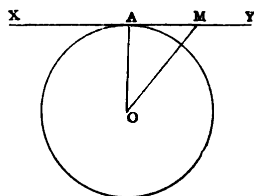


Fig. 73.

Ainsi la droite XY a au moins deux points communs avec la circonférence ; d'ailleurs nous savons qu'elle ne peut pas en avoir plus de deux.

2° Si la distance OA est égale au rayon (fig. 73), le point A est sur la circonférence. Tout point M de la droite XY, autre que A, est extérieur au cercle, car l'oblique OM est plus grande que la perpendiculaire OA. Donc, dans ce cas, la droite XY ne rencontre la circonférence qu'en un point, le point A.

3° Si la distance OA est plus grande que le rayon (fig. 74), le point A est extérieur. Il en est de même, à plus forte raison, de tout autre point M de la droite XY, car OM > OA. Dans ce cas, la droite XY ne rencontre pas la circonférence.

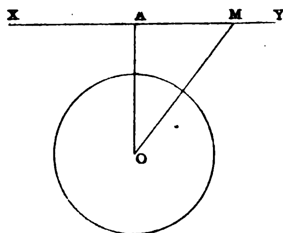


Fig. 74.

Les réciproques sont vraies [19].

79. On dit qu'une droite est *sécante* à une circonférence quand elle la rencontre en deux points.

On dit qu'une droite est *tangente* à une circonférence quand elle la rencontre en un seul point. Ce point s'appelle le *point de contact.*

Enfin, quand une droite n'a aucun point commun avec une circonférence, tous les points de la droite sont extérieurs à la circonférence et on dit que la droite est elle-même *extérieure* à la circonférence.

D'après ce qui précède, pour qu'une droite soit tangente à un cercle, il faut et il suffit que la distance du centre à la droite soit égale au rayon, c'est-à-dire que *cette droite soit perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon.*

Soient A (fig. 75) un point d'une circonférence, AT la tangente en ce point, c'est-à-dire la perpendiculaire à l'extrémité du rayon OA. Toute autre droite AX passant par A rencontre nécessairement la circonférence en un second point. D'ailleurs on peut s'en assurer en abaissant OC perpendiculaire sur AX et en prenant sur le prolongement de AC une longueur CB égale à AC ; comme OB = OA, le point B est un second point commun à la circonférence et à la droite AX.

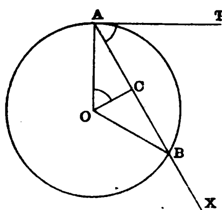


Fig. 75.

Supposons maintenant que le point B se déplace sur la circonférence en se rapprochant indéfiniment du point A, l'angle AOB deviendra aussi petit qu'on voudra et il en sera de même, à plus forte raison, de l'angle AOC, qui est la moitié de AOB. Mais l'angle AOC est égal à l'angle BAT, car ces deux angles ont tous deux pour complément l'angle OAC. Donc, l'angle BAT diminue indéfini-

ment en même temps que la distance AB. Par conséquent, quand le point B viendra se confondre avec le point A, la sécante ABX viendra se confondre avec la tangente AT.

C'est cette propriété qu'on prend pour définition de la tangente à une courbe quelconque.

Définition. — On appelle *tangente à une courbe, en un point* A (fig. 76), la droite qui occupe la position limite de la droite qui joint le point A à un autre point B de la courbe, quand ce second point se rapproche indéfiniment du premier jusqu'à se confondre avec lui.

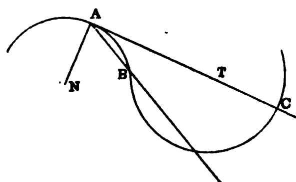


Fig. 76.

En d'autres termes, on dit qu'une droite AT est tangente à une courbe en un point A, quand l'angle qu'elle forme avec la droite qui joint le point A à un autre point B de la courbe tend vers zéro en même temps que la distance AB [1].

Rien n'empêche que la tangente AT rencontre la courbe en d'autres points que le point de contact.

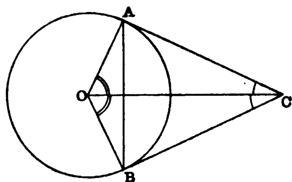


Fig. 77.

80. Deux tangentes à un même cercle, menées en des points diamétralement opposés, sont parallèles, puisqu'elles sont perpendiculaires au même diamètre.

Deux tangentes, menées en des points A et B (fig. 77) non diamétralement opposés, se rencontrent, puis-

[1] On entend par là qu'à tout angle α on peut faire correspondre une longueur λ telle que l'inégalité $AB < \lambda$ entraîne $\widehat{TAB} < \alpha$.

qu'elles sont perpendiculaires à deux droites concourantes OA et OB [43, III].

Ces tangentes jouissent de propriétés remarquables.

Soit C leur point de rencontre. Les triangles rectangles OAC, OBC sont égaux, comme ayant l'hypoténuse commune et un côté de l'angle droit égal OA=OB. Par conséquent, CA=CB; en outre, dans les mêmes triangles, les angles en C sont égaux, ainsi que les angles en O. Par suite [49, I], la droite OC est perpendiculaire sur le milieu de AB.

Ainsi, *les tangentes issues d'un point sont égales, et la droite qui joint leur point de concours au centre est bissectrice de l'angle des tangentes et de l'angle des rayons qui aboutissent au point de contact et perpendiculaire au milieu de la corde qui joint les points de contact.*

81. On appelle *normale*, en un point A d'une courbe, (fig. 76) la perpendiculaire AN menée par ce point à la tangente. Ce point s'appelle le *pied* de la normale.

La normale à un cercle, en un point A (fig. 77), est la droite qui joint ce point au centre du cercle.

Réciproquement, tout diamètre est normal au cercle à chacune de ses extrémités.

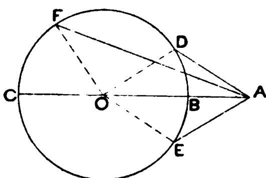


Fig. 78.

82. D'un point A (fig. 78), intérieur ou extérieur à un cercle O, on peut mener deux normales AB, AC, dont les pieds B et C sont les points de rencontre de la droite AO avec la circonférence.

1° Toute *oblique* AD est moindre que l'une de ces deux normales et plus grande que l'autre. Car

$$|OA - OD| < AD < OA + OD,$$

ou

$$AB < AD < AC.$$

2° Deux obliques AD, AE qui s'écartent également du pied de l'une des normales sont égales ; car si $\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{BE}$, les triangles OAD, OAE sont égaux, comme ayant un angle égal compris entre côtés égaux.

3° De deux obliques AD, AF, la plus petite est celle qui s'écarte le moins du pied B de la petite normale. Car, si $\overset{\frown}{BD} < \overset{\frown}{BF}$, les triangles OAD, OAF ont un angle inégal $\widehat{AOD} < \widehat{AOF}$, compris entre côtés égaux. Donc AD < AF.

La plus petite normale s'appelle la *distance* du point A à la circonférence.

83. ***Théorème.*** — *Deux parallèles interceptent sur une circonférence des arcs égaux.*

1° Soient (fig. 79) AB, CD deux sécantes parallèles qui interceptent des arcs AC et BD sur la circonférence O. Menons le diamètre EF perpendiculaire à ces cordes. On a :

$$\text{arc } AF = \text{arc } BF,$$
$$\text{arc } CF = \text{arc } DF ;$$

d'où

$$\text{arc } AF - \text{arc } CF = \text{arc } BF - \text{arc } DF,$$

ou

$$\text{arc } AC = \text{arc } BD.$$

2° Soient AB une corde et FH une tangente parallèle à cette corde. Le diamètre qui passe par le point de contact F est perpendiculaire à la tangente et, par suite, à la corde. Donc [76]

$$\text{arc } AF = \text{arc } BF.$$

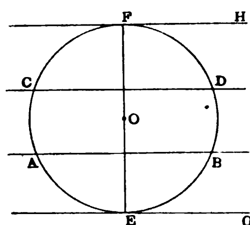


Fig. 79.

3° Soient EG, FH deux tangentes parallèles ; elles sont perpendiculaires aux extré-

mités d'un même diamètre. Donc les arcs EAF, EBF sont égaux comme valant chacun une demi-circonférence.

84. **Théorème.** — *Il y a quatre cercles tangents aux côtés d'un triangle donné.*

Le centre d'un cercle tangent aux trois côtés d'un triangle ABC (fig. 80) est à une distance de chacun des côtés égale à son rayon ; il est donc équidistant de ces trois côtés. Par suite, il se trouve sur la bissectrice BX de l'angle B ou sur la bissectrice BY de l'angle extérieur ABN ; de même, il se trouve sur la bissectrice CZ de l'angle C ou sur la bissectrice CV de l'angle extérieur ACK. Or BX et CZ se coupent évidemment en un point O situé à l'intérieur du triangle ; ensuite les *demi-droites* BX et CV font avec BC des angles intérieurs dont la somme est égale à $\frac{B}{2} + \frac{C}{2} + 90^\circ$, par suite, moindre que 180° ; donc elles se coupent en un point O″ situé par rapport à BC du même côté que A, et, par conséquent, situé dans l'angle B, mais à l'extérieur du triangle. De même, BY et CZ se coupent en un point O‴ situé dans l'angle C, à l'extérieur du triangle. Enfin les *demi-droites* BY′ et CV′ opposées à BY et à CV se coupent en un point O′ situé dans l'angle A à l'extérieur du triangle. Il y a donc quatre cercles tangents aux trois côtés du triangle, ayant pour centres les points O, O′, O″, O‴ et pour rayons les distances de ces quatre points à l'un des côtés.

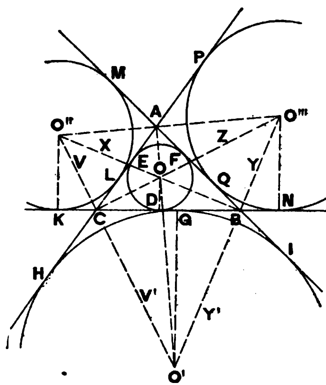


Fig. 80.

Le cercle de centre O est intérieur au triangle : on l'appelle *inscrit*. Les trois autres sont extérieurs et sont dits *exinscrits*.

REMARQUE. — Le point O, étant équidistant des trois côtés et situé dans l'angle A, se trouve sur la bissectrice de cet angle; il en est de même de O'. Les deux autres points O'', O''' se trouvent sur la bissectrice de l'angle extérieur CAM. Par conséquent :

1° *Les trois bissectrices intérieures concourent en un même point, qui est le centre du cercle inscrit;*

2° *Les bissectrices de deux angles extérieurs et la bissectrice intérieure du troisième angle concourent au centre de l'un des cercles exinscrits.*

85. Nous allons calculer, en fonction des côtés, les segments déterminés sur les côtés par les points de contact des cercles inscrit et exinscrits.

Désignons par $2p$ le périmètre du triangle, par a, b, c, les trois côtés BC, CA, AB; par D, E, F, par G, H, I, ... les points de contact de ces côtés avec les cercles O, O',... On a

$$2p = AF + AE + BF + BD + CD + CE.$$

Mais AF = AE, BF = BD, CD = CE comme tangentes issues d'un même point [80]. Donc

$$2p = 2\,AF + 2\,BD + 2\,CD,$$

$$p = AF + BD + CD = AF + a.$$

D'où

$$AF = p - a.$$

De même,

$$BD = p - b, \quad CD = p - c.$$

Ensuite, on a aussi

$$2p = AB + BG + CG + CA = AB + BI + CH + CA,$$

ou

$$2p = AI + AH = 2\,AI.$$

D'où $AI = p$.

Et de même $BM = p$, $CP = p$.

On en déduit aisément

$$GD = |b - c|, \quad KN = b + c, \quad DK \quad b, \quad GK = c, \text{ etc.}$$

EXERCICES

1. Dans tout triangle rectangle, le diamètre du cercle inscrit est égal à l'excès de la somme des côtés de l'angle droit sur l'hypoténuse. Trouver la propriété analogue pour les cercles exinscrits.

2. Démontrer que, dans un cercle, toutes les cordes de même longueur sont tangentes à une même circonférence.

3. D'un point quelconque C, pris sur un diamètre fixe AB d'un cercle O, on mène une tangente CD ; trouver le lieu du pied de la perpendiculaire, abaissée du centre sur la bissectrice de l'angle ACD. — Deux droites.

4. Construire un triangle, connaissant trois des centres des cercles inscrit et exinscrits.

5. Trouver le lieu géométrique des points tels que les tangentes menées par ces points à un cercle donné fassent un angle donné. — Une circonférence.

6. Sur une tangente en A à un cercle O, on prend deux points B et C, par lesquels on mène les tangentes BD, CE. Prouver que les angles BOC, DAE sont égaux ou supplémentaires.

7. D'un point variable C d'une circonférence O, on abaisse sur un diamètre fixe AB une perpendiculaire CD et on prend sur le rayon OC un segment OM égal à CD. Trouver le lieu du point M. — Une circonférence.

CHAPITRE III

POSITIONS RELATIVES DE DEUX CERCLES

86. ***Théorème.*** — *Par trois points* A,B,C (fig. 81), *non en ligne droite, on peut faire passer une circonférence et on n'en peut faire passer qu'une.*

En effet, le centre d'une circonférence passant par A, B, C doit être équidistant des trois points A, B, C. Or le lieu des points équidistants de A et de B est la perpendiculaire DE élevée au milieu de AB ; le lieu des points équidistants de A et de C est la perpendiculaire FG élevée au milieu de AC. Ces droites DE, FG, respectivement perpendiculaires à deux droites AB, AC qui se coupent, se coupent elles-mêmes en un point O, qui est à égale distance des trois points donnés. La circonférence décrite de O comme centre, avec OA pour rayon, passe donc par les trois points A, B, C et il n'y en a pas d'autre, puisque O est le seul point du plan équidistant des points donnés.

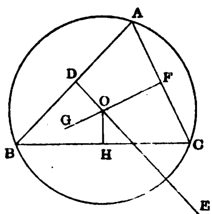


Fig. 81.

Remarque. — Le point O étant équidistant des trois points A, B, C se trouve aussi sur la perpendiculaire élevée au milieu de BC. Donc

Les trois médiatrices d'un triangle concourent en un même point, qui est le centre du cercle circonscrit.

87. Quand une circonférence passe par tous les sommets d'un polygone, on dit qu'elle est *circonscrite* au polygone, ou que le polygone est *inscrit* à la circonférence. Ainsi la circonférence, qui passe par A, B, C (fig. 81), est circonscrite au triangle ABC.

De même, quand tous les côtés d'un polygone sont tangents à un cercle, on dit que le polygone est *circonscrit* au cercle, ou que le cercle est *inscrit* au polygone.

88. **Théorème**. — *Quand deux circonférences* O *et* O'

(fig. 82) *ont un point commun* A *hors de la ligne des centres, elles en ont un second symétrique du premier par rapport à cette ligne.*

Soit B le symétrique de A par rapport à OO′. On a OA = OB, O′A = O′B, comme obliques s'écartant également du pied de la perpendiculaire ; donc le point B appartient aux deux circonférences.

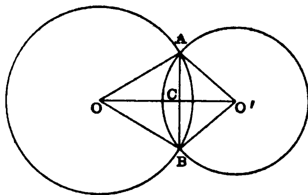


Fig. 82.

89. ***Théorème***. — *Quand deux circonférences* O *et* O′(fig. 82) *ont deux points communs* A *et* B, *ces deux points sont symétriques par rapport à la ligne des centres.*

En effet, les points O et O′ étant équidistants de A et de B, la droite OO′ est perpendiculaire sur le milieu de AB.

90. Définition. — On dit que deux courbes sont *tangentes en un point* quand elles passent par ce point et qu'elles ont même tangente en ce point.

91. ***Théorème***. — *Quand deux circonférences* O *et* O′ (fig. 83) *sont tangentes en un point* A, *ce point est sur la ligne des centres et les circonférences n'ont pas d'autre point commun que le point* A. *Et réciproquement.*

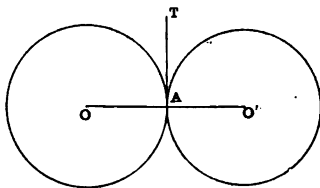


Fig. 83.

En effet, la tangente commune AT est perpendiculaire aux rayons OA, O′A. Donc ces rayons sont en ligne droite et le point A est sur la

droite OO'. Les circonférences n'ont pas d'autre point commun; car, si elles avaient un second point commun, ce second point serait symétrique de A par rapport à OO' [89] et, par suite, se confondrait avec A.

Réciproquement, si les circonférences n'ont pas d'autre point commun que le point A, ce point doit se trouver sur OO', sans quoi les deux circonférences auraient un second point commun [88]. Mais alors la perpendiculaire à OO', menée par A, est à la fois tangente aux deux circonférences; donc ces circonférences sont tangentes.

On dit qu'elles sont tangentes *extérieurement* ou *intérieurement*, selon que tous les points de l'une, autres que le point de contact, sont extérieurs (fig. 85) ou intérieurs (fig. 87) à l'autre.

92. Nous savons [86] que deux circonférences, qui ont trois points communs, coïncident. Donc deux circonférences distinctes ne peuvent présenter que *cinq* positions relatives: ou bien elles ont deux points communs et alors on dit qu'elles sont *sécantes;* ou bien elles ont un seul point commun et alors elles sont *tangentes* extérieurement ou intérieurement; ou, enfin, elles n'ont aucun point commun et alors elles sont *extérieures* l'une à l'autre, ou l'une est *intérieure* à l'autre.

Théorèmes. — 1° *Quand deux circonférences sont* extérieures, *la distance des centres est plus grande que la somme des rayons ;*

2° *Quand deux circonférences sont* tangentes extérieurement, *la distance des centres est égale à la somme des rayons ;*

3° *Quand deux circonférences sont* sécantes, *la distance*

des centres est plus petite que la somme des rayons et plus grande que leur différence ;

4° *Quand deux circonférences sont* tangentes intérieurement, *la distance des centres est égale à la différence des rayons ;*

5° *Quand deux circonférences sont* intérieures *l'une à l'autre, la distance des centres est moindre que la différence des rayons.*

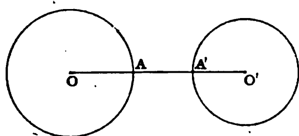


Fig. 84.

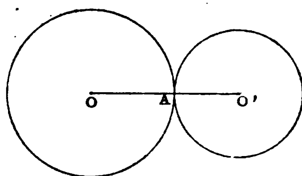


Fig. 85.

1° Soient O, O′ (fig. 84) deux circonférences extérieures ; A et A′ les points de ces deux circonférences situés sur OO′. Le point A′ est entre A et O′ ; donc

$$OO' = OA + AA' + A'O',$$

d'où

$$OO' > OA + O'A'.$$

2° Si les deux circonférences sont tangentes extérieurement en A (fig. 85), ce point A est sur OO′. Donc

$$OO' = OA + O'A.$$

3° Si les deux circonférences se coupent en deux points M et N (fig. 86), ces deux points sont symétriques par rapport à OO′ et, par suite, en dehors de OO′, sans quoi ils se confondraient. Donc, dans le triangle OMO′, le côté OO′ est moindre que la somme des rayons OM, O′M et plus grand que leur différence.

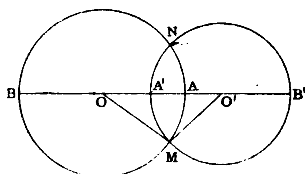


Fig. 86.

... gentes inté-
... le prolonge-

... la circonfé-
... points de ces

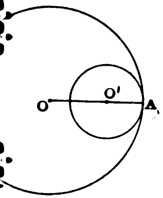


Fig. 87.

... aient même
... lles sont *con-*
... distance des
... donc encore
... des rayons.

... raies [19].

... *ur que deux*
... *distance des*
... *ayons et plus*
... ue, en dési-
... les rayons,

... *r.*

... ns sont *suffi-*

santes En effet, soient (fig. 86) A et B, A′ et B′ les points de rencontre de OO′ avec les deux circonférences, le point B étant sur le prolongement de O′O du côté de O et le point B′ sur le prolongement de OO′ du côté de O′. La condition $r' < d + r$, ou $r' <$ O′B exprime que le point B est *extérieur* au cercle O′; les deux autres expriment que r' est plus grand que la différence entre d et r, ou que $r' >$ O′A ; donc le point A est *intérieur* au cercle O′. Donc, le point A étant intérieur et le point B extérieur, chacune des demi-circonférences AB coupe la circonférence O′.

Cas particulier. — Si $r = r'$, la condition $d > |r - r'|$ est vérifiée ; reste la condition $d < r + r'$, ou $d < 2r$, ou $r > \frac{d}{2}$.

Donc, *pour que deux cercles égaux se coupent, il faut et il suffit que leur rayon soit plus grand que la moitié de la distance des centres.*

EXERCICES

1. Les trois hauteurs d'un triangle ABC (fig. 89) concourent en un même point, qu'on appelle l'*orthocentre* du triangle. Car, en menant par A, B, C les parallèles aux côtés BC, CA, AB, on forme un second triangle A′B′C′, dans lequel A, B, C sont les milieux des côtés ; car AB′ = BC = AC′,... Donc les hauteurs du triangle ABC sont les médiatrices du triangle A′B′C′. Donc elles concourent en un même point.

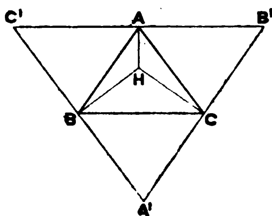


Fig. 89.

2. On peut mener à deux circonférences quatre normales communes, qui ont pour extrémités les points de rencontre de ces circonférences avec la droite des centres.

Montrer que la distance de deux points quelconques de ces deux circonférences est toujours moindre que la plus grande des quatre normales et qu'elle est plus grande que la plus petite, si les circonférences sont extérieures ou intérieures.

3. Etant donnés dans un plan quatre points non en ligne droite, tracer une circonférence équidistante de ces quatre points. Combien y a-t-il de solutions ?

4. On donne quatre points A, B, C, D. Construire un cercle passant par A et B et tel que les tangentes issues des points C et D soient égales.

5. Quand trois cercles sont tangents deux à deux, les trois tangentes communes concourent en un même point, qui est le centre du cercle inscrit au triangle ayant pour sommets les centres des trois cercles.

6. Quel est le lieu des points de contact de deux circonférences tangentes entre elles et tangentes à une même droite ou à une même circonférence en des points donnés ? — Une circonférence.

CHAPITRE IV

MESURE DES ANGLES

94. On appelle *rapport* d'une grandeur A à une autre grandeur B de même espèce et on désigne par $\frac{A}{B}$ le nombre par lequel il faut multiplier B pour avoir un produit égal à A.

Par exemple, dire que $\frac{A}{B} = \frac{5}{3}$, c'est dire que $A = B \times \frac{5}{3}$ ou que A est les $\frac{5}{3}$ de B.

Le rapport de deux grandeurs est un nombre rationnel ou irrationnel.

Soient A et B deux grandeurs de même espèce, A′ et B′ deux autres grandeurs d'une même espèce, différente ou non de la première ; dans le cas où les rapports $\frac{A}{B}$, $\frac{A'}{B'}$ sont

irrationnels, ces deux rapports sont égaux lorsque, quelle que soit la fraction $\frac{m}{n}$, les deux différences

$$A - \frac{m}{n}B, \quad A' - \frac{m}{n}B',$$

sont *de même signe :* nous entendons par là que A est inférieur ou supérieur à $\frac{m}{n}$B, selon que A′ est lui-même inférieur ou supérieur à $\frac{m}{n}$B′.

95. ***Théorème.*** — *Dans un même cercle ou dans des cercles égaux, le rapport de deux angles au centre* AOB, A′O′B′ (fig. 90) *est égal au rapport des arcs* AB, A′B′ *compris entre leurs côtés.*

1° Supposons que le rapport $\frac{AB}{A'B'}$ soit un nombre rationnel ; par exemple :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{5}{3}.$$

Cela veut dire que AB est les $\frac{5}{3}$ de A′B′, c'est-à-dire que, si l'on partage A′B′ en trois parties égales, AB contiendra cinq de ces parties. Joignons les points de division au centre, l'angle A′O′B′ sera partagé en trois angles partiels et l'angle AOB en cinq ; ces huit angles sont égaux comme angles au centre interceptant des arcs égaux.

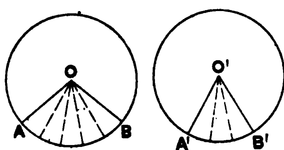


Fig. 90.

Donc

$$AOB = \frac{5}{3}A'O'B',$$

ou

$$\frac{AOB}{A'O'B'} = \frac{5}{3} = \frac{AB}{A'B'}.$$

[illegible] soit un nombre

[illegible]

[illegible] parties égales et [illegible] de l'arc AB, [illegible] mme de ces m [illegible] t les points de [illegible] era plus grand [illegible] O'B'.

[illegible]

[illegible] A'B' entraîne

[illegible]

[illegible] le rapport de [illegible] même espèce

[illegible]

[illegible] *ence, ou dans* [illegible] *unité d'angle* [illegible] *té d'arc l'arc* [illegible] *gle au centre* [illegible] *mbre que la* [illegible]

[illegible]) soit l'unité [illegible]

[illegible]

c'est-à-dire :

Mesure de l'angle AOB = mesure de l'arc AB.

Pour abréger, on énonce ce théorème de la manière suivante :

*Un angle au centre a pour mesure l'*arc *compris entre ses côtés.*

Mais alors il ne faut pas perdre de vue que le mot **arc** veut dire : *nombre qui mesure l'arc.*

Remarque. — Un angle droit a pour mesure un quadrant [32].

97. On appelle angle *inscrit* un angle formé par deux cordes partant d'un même point de la circonférence.

Théorème. — *Un angle inscrit a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés.*

Considérons d'abord un angle inscrit BAC (fig. 91), dont un côté AB passe par le centre. Menons le rayon OC. Dans le triangle isoscèle AOC, l'angle extérieur BOC est double de l'angle intérieur non adjacent OAC. Or BOC a pour mesure l'arc BC, donc OAC a pour mesure la moitié de cet arc.

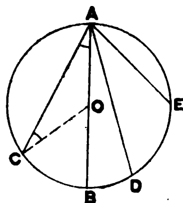


Fig. 91.

Soit maintenant un angle inscrit CAD, dont les côtés sont de part et d'autre du centre. Menons le diamètre AB. Les angles BAC, BAD ont pour mesures $\frac{BC}{2}$, $\frac{BD}{2}$; donc leur somme CAD a pour mesure $\frac{BC}{2} + \frac{BD}{2}$ ou $\frac{CD}{2}$.

Considérons enfin un angle inscrit DAE dont les côtés

[illegible] étant la diffé-
[illegible] $\frac{BE}{2} - \frac{BD}{2}$ ou

[illegible] *à un demi-*
[illegible]

[illegible] dont le som-
[illegible] formé par une
[illegible] autre corde AD
[illegible] et AD ; car il
[illegible] D, ADB

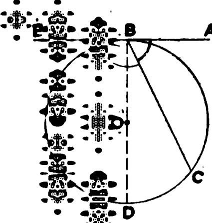


Fig. 93.

[illegible] 93), *formé par*
[illegible] *par le point de*
[illegible] *compris entre ses*

[illegible] menons le dia-
[illegible] e un quadrant,
[illegible] BCD ; l'angle
[illegible] angle ABC, qui
[illegible] $\frac{BCD}{2} - \frac{CD}{2}$

On prouverait, de même, que l'angle obtus EBC a pour mesure la moitié de l'arc BDC.

99. On appelle *segment* la portion de cercle comprise entre un arc AMB (fig. 94) et sa corde AB.

Tous les angles ACB, ADB..., inscrits à ce segment sont égaux ; car ils ont même mesure. Soit α leur valeur commune : on dit que le segment est *capable* de l'angle α.

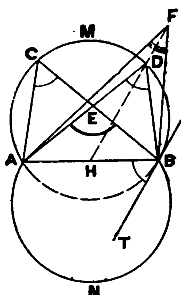


Fig. 94.

L'angle ABT, formé par AB et par la tangente en B, est aussi égal à α.

Soit E, un point intérieur au segment ; l'angle AEB est plus grand que α. Car, en appelant D le point de rencontre de AE avec l'arc AMB, on a

$\widehat{AEB} > \widehat{ADB}$.

Au contraire, soit F un point extérieur au segment et situé par rapport à AB du même côté que ce segment, l'angle AFB est moindre que α. Car, soient H un point de la portion de droite AB et D le point de rencontre de HF avec l'arc AMB [1], on a

$\widehat{AFB} < \widehat{ADB}$.

Par conséquent, *l'arc* AMB *est le lieu géométrique des points situés par rapport à* AB *du même côté que* M *d'où l'on voit* AB *sous l'angle* α.

De même, le lieu des points situés de l'autre côté de AB, d'où l'on voit AB sous le même angle α, est un

(1) Il peut arriver que les côtés de l'angle AFB ne rencontrent pas l'arc AMB ; c'est pourquoi nous avons recours au point H.

AB. Par con-

l'on voit une
de deux arcs
par rapport

né par deux
intérieur du
arcs AC, BD
rolongements.
gles inscrits

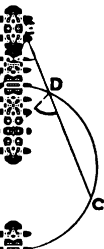


Fig. 96.

6), *formé par*
cercle, a pour

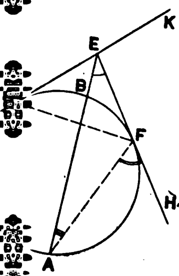


Fig. 97.

— $\widehat{EGF}$.

Enfin, l'angle *excirconscrit* FEK, qui est la somme des angles EFG et EGF, a pour mesure l'arc FG.

QUADRILATÈRE INSCRIPTIBLE

102. **Théorème.** — *Dans tout quadrilatère convexe inscrit à un cercle, les angles opposés sont supplémentaires. Et réciproquement.*

En effet, soit ABCD (fig. 98), un quadrilatère inscrit convexe ; les angles A et C ont à eux deux pour mesure la moitié de toute la circonférence, c'est-à-dire 180°; donc ils sont supplémentaires.

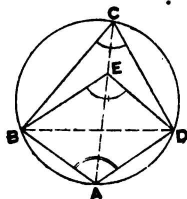


Fig. 98.

Réciproquement, soit ABED un quadrilatère convexe dans lequel les angles A et E sont supplémentaires. Par les trois points A, B, D, faisons passer une circonférence, qui rencontrera la diagonale AE en un point C, situé par rapport à BD du même côté que E. L'angle BCD est supplémentaire de l'angle BAD, par suite égal à BED. Il en résulte que le point E doit se confondre avec le point C ; car, autrement, l'angle BED serait plus grand ou plus petit que l'angle BCD [53,I]. Donc le quadrilatère ABED est inscriptible à un cercle.

EXERCICES

1. Les hauteurs d'un triangle ABC (fig. 99) sont les bissectrices du triangle DEF qui a pour sommets les pieds de ces trois hauteurs. — On considère les quadrilatères inscriptibles BCEF, CAFD, ABDE.

2. Soient A et B les points d'intersection de deux circonférences; on mène par A deux sécantes ACC', ADD'. Démontrer que les cordes CD, C'D' se coupent sous un angle constant et que

$$\widehat{CBC'} = \widehat{DBD'}.$$

... qui se coupent,
... qui joignent les

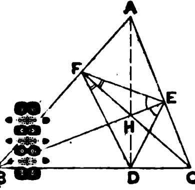


Fig. 99.

... milieux des côtés
... ne les trois cir-
... coupent en un

... entre d'un triangle
... démontrer que le
... de la hauteur AH
... ymétrique de H

... t de la circonfé-
... angle ABC ; les
... ulaires abaissées
... A, AB sont sur
... pelle la *droite de*

... MQAR, MACB,

... droites QR et QP

... es points P, Q, R
... centre H. Soit N
... 6) que la hauteur
... de H par rapport

Or, dans les quadrilatères inscriptibles MBKA, MBPR,

$$\widehat{AKM} = \widehat{RBM} = \widehat{RPM}.$$

Donc, les angles $\widehat{HNM}$ et $\widehat{RPM}$ étant égaux, PR est parallèle à NH. On prouverait, de même, que PQ est parallèle à NH. Donc PR et PQ coïncident.

8. Par un point M de la circonférence circonscrite au triangle ABC (fig. 100), on mène la perpendiculaire au côté BC, qui rencontre la circonférence en D. Prouver que AD est parallèle à la droite de Simson PQR du point M.

En déduire que les droites de Simson de deux points diamétralement opposés sont rectangulaires.

9. Lieu des milieux des cordes interceptées par un cercle sur les sécantes issues d'un point donné. — Une circonférence.

10. Etant donné un triangle ABC rectangle en A, on mène à l'hypoténuse une perpendiculaire quelconque, qui rencontre AB en D et AC en E, puis on mène les droites BE et CD : quel est le lieu du point de rencontre de ces deux droites ? — Une circonférence de diamètre BC.

11. Etant donnés un point O et deux droites Δ, Δ', un angle constant XOX′ pivote autour du point O ; soient A le point de rencontre de OX avec Δ, et A′ celui de OX′ avec Δ'. Quel est le lieu de la projection de O sur AA′ ? — Une circonférence en général ; une droite si l'angle XOX′ est égal à l'angle de Δ' avec Δ (Ex. 7).

12. Etant donnés un point F et une droite Δ, on prend sur cette droite un point quelconque M, par lequel on mène une droite MN faisant avec MF un angle constant. Quel est le lieu de la projection de F sur MN ? — Une droite.

13. Etant donné un triangle ABC, on mène par A une droite quelconque, sur laquelle on projette les points B et C en B′ et C′. Quel est le lieu du milieu de B′C′ ? — Une circonférence.

14. Etant donnés deux cercles O et O′ qui se coupent en A et B, soient C et C′ les points diamétralement opposés à A :

1° Les trois points B, C, C′ sont en ligne droite.

2° Si on mène par A une sécante rencontrant les deux cercles en M et M′, le lieu du milieu de MM′ est un cercle passant par A et B et ayant pour centre le milieu de OO′. — Car M et M′ sont les projections de C et de C′ sur la sécante, etc.

15. Dans tout triangle, à un plus grand angle correspond une plus petite bissectrice.

Nous avons déjà indiqué une démonstration (p. 51) ; en voici une autre, due à M. Rebuffel, basée sur la mesure des angles.

$\widehat{B} < \widehat{C}$, la bissec-
ssectrice CE de
le cercle passant
ar suite, moindre
le BCF, qui est
, mais *plus petit*
que l'arc EFC et
$BF < BD$.

ue les construc-
et le compas.
re pour le tracé

ne construction,
qui sont dues à

faire passer le
vement :
par deux points.
querre par deux
igne déjà tracée.
l'opération qui
cidence avec une
n de préparation

de la règle jus-

pas en un point
s le compas une

compas en un point

era représentée par le

$\ldots C_2 + fR_2 + gC_3)$,

en raison inverse du

g des opérations élé-

ons ce nombre *le coeffi-*

end que du nombre

préparation ; c'est pour-

fficient d'exactitude.

endiculaire au milieu

ite, trouver le milieu

e ouverture de compas

a moitié de AB, dé-

de cercle, de part et

$\ldots C_1 + C_3)$.

entre, avec la même

pas, décrivons deux

ui coupent les précé-

par C et D :

] et le point O,

cercles.

ouverture de

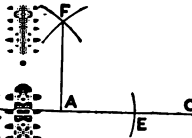
il n'y a qu'à

à prendre la

A, *la perpen-*

(fig. 102).

iconque, décri-



102.

nt en F :

7, corollaire] :

xactitude : 5.

2° *Le point* A *est à l'extrémité de la droite* BC (fig. 103).

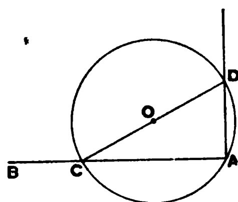


Fig. 103.

D'un point O quelconque [1], avec OA pour rayon, décrivons un cercle qui coupe la droite BC, en un second point C :

$$\text{Op.}(C_1 + C_3).$$

Menons CO, qui rencontre le cercle en un second point D :

$$\text{Op.}(2R_1 + R_2).$$

Traçons AD :

$$\text{Op.}(2R_1 + R_2).$$

C'est la perpendiculaire demandée, car l'angle CAD est droit, comme inscrit à un demi-cercle.

La construction a pour symbole total :

$\text{Op.}(4R_1 + C_1 + 2R_2 + C_3)$. Simplicité : 8. Exactitude : 5.

3° *Le point* A *est hors de la droite* BC (fig. 104).

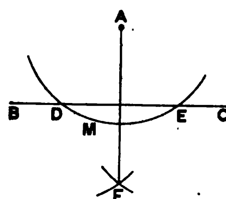


Fig. 104.

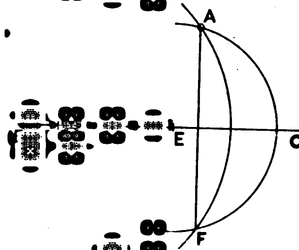
Mettons une pointe du compas, en A et l'autre, en M, *de l'autre côté de* BC, puis décrivons un cercle, de centre A et de rayon AM, qui coupe BC, en deux points D et E ; puis, de D et E comme centres, avec une même ouverture de compas, décrivons deux cercles qui se coupent en F. AF est la droite demandée [57, corollaire].

$\text{Op.}(2R_1 + 3C_1 + R_2 + 3C_3)$. Simplicité : 9. Exactitude : 5.

---

(1) Il n'y a pas lieu de compter pour une opération l'action de piquer une pointe du compas en un point quelconque O du plan.

es D et E



e la perpen-
oite BC.

oyen de l'é-
. — Que le
u non, sur la
ce le côté DE
de l'équerre

R'_1).

ique la règle
n fait glisser
e le côté EF

à cause de
le à EF :
ude : 3.

107. **Problème.** — *Mener, par un point* A, *la parallèle à une droite* BC (fig. 107).

1° Décrivons un arc de cercle DE, de centre A, qui coupe BC en D ; de D comme centre, avec la même ouverture de compas, décrivons un cercle AF, qui coupe BC en F ; prenons avec le compas la longueur AF et, avec cette longueur pour rayon, décrivons, du point D comme centre, un cercle qui coupe le cercle DE en G. Enfin traçons AG, qui est la parallèle cherchée ; car les angles alternes internes ADF, DAG sont égaux, à cause de l'égalité des triangles ADF, DAG, qui ont les trois côtés égaux chacun à chacun.

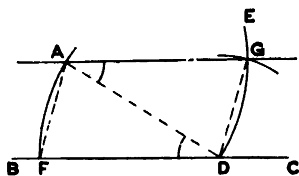


Fig. 107.

Op. ($2R_1 + 5C_1 + R_2 + 3C_3$). Simplicité : 11. Exactitude : 7.

2° Décrivons un cercle quelconque (fig. 108), passant par A et coupant BC en D et E ; puis, de E comme centre, avec une ouverture de compas égale à AD, décrivons un second cercle, qui coupe le premier en F. La parallèle demandée est AF [83].

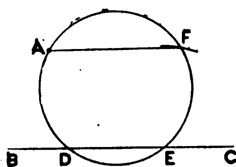


Fig. 108.

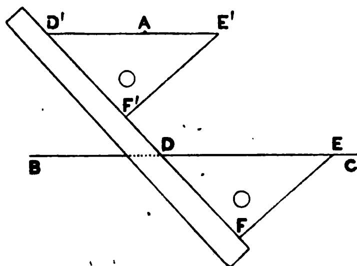


Fig. 109.

Op. ($2R_1 + 4C_1 + R_2 + 2C_3$). Simplicité : 9. Exactitude : 6.

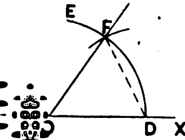
[illegible] and côté DE
[illegible] une règle
[illegible] erre le long
[illegible] ne une posi-
[illegible] t D'E', une
[illegible] angles cor-
[illegible]

[illegible] de : 3.

[illegible] ment précis ;
[illegible] mais simple-
[illegible]

[illegible] points don-
[illegible] te, on cons-
[illegible] de la règle
[illegible] ui mène des
[illegible]

[illegible] *droite* OX,
[illegible] OX *un angle*
[illegible]



[illegible] o.

[illegible] E, qui ren-
[illegible] re, avec une
[illegible] s un arc de
[illegible] l à l'angle A,
[illegible] s trois côtés
[illegible]

[illegible] actitude : 7.

110. Problème. — *Partager un angle ou un arc de cercle en deux parties égales.*

Soit BAC l'angle donné (fig. 111). Du sommet A comme centre, avec un rayon arbitraire, décrivons un cercle, qui coupe les côtés de l'angle en B et C; puis de B et de C comme centres, avec le même rayon, décrivons deux arcs de cercle qui se coupent en D : AD est la bissectrice demandée; car, les triangles ABD, ACD étant égaux comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun, les angles en A sont égaux.

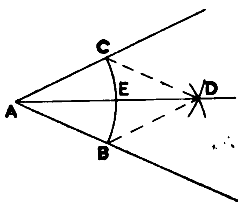


Fig. 111.

La bissectrice AD passe par le milieu de l'arc BC.

Op.($2R_1 + 3C_1 + R_2 + 3C_3$). Simplicité : 9. Exactitude : 5.

Construction de triangles, etc.

111. Problème. — *Construire un triangle* ABC, *connaissant un côté:* $BC = a$ *et les deux angles adjacents:* $B = \beta$, $C = \gamma$.

Il suffit de prendre, sur une droite indéfinie, une longueur BC (fig. 112), égale à la longueur donnée a, et de mener par B et C deux droites BA et CA faisant avec BC des angles respectivement égaux aux angles donnés β et γ:

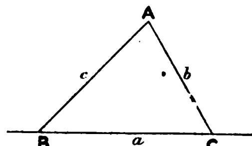


Fig. 112.

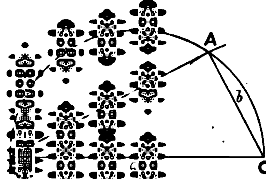
112. Problème. — *Construire un triangle* ABC, *connaissant un angle* $A = \alpha$ *et les deux côtés qui le comprennent:* $AB = c$, $AC = b$.

[illegible] donné α et
[illegible] longueurs AB
[illegible]

[illegible] ABC, *con-*
[illegible] $= c$.
[illegible]ie, une lon-
[illegible] C comme
[illegible] cercle, qui
[illegible]ne sommet
[illegible]

[illegible] et il suffit
[illegible]re [93] que
[illegible]ndre que la
[illegible]

[illegible]*te rectangle,*
[illegible]*ngle droit b.*



[illegible]4.

[illegible]ons sur l'un
[illegible]me centre,
[illegible]oupe l'autre
[illegible]e problème
[illegible]endu $a > b$,
[illegible]

[illegible] déterminée

BC (fig. 114), sur cette ligne comme diamètre on décrira une demi-circonférence et, de C comme centre avec b pour rayon, on tracera un arc de cercle qui coupera la demi-circonférence en A : ABC sera le triangle demandé.

115. Problème. — *Construire un triangle* ABC, *connaissant deux côtés* BC $= a$, AC $= b$ *et l'angle opposé à l'un d'eux : par exemple*, $A = \alpha$.

Faisons un angle XAY $= \alpha$ (fig. 115); prenons, sur l'un de ses côtés, AC $= b$ et, de C comme centre avec a pour rayon, décrivons une circonférence : si B est un point commun à cette circonférence et à la *demi-droite* AX, le triangle ABC répondra à la question.

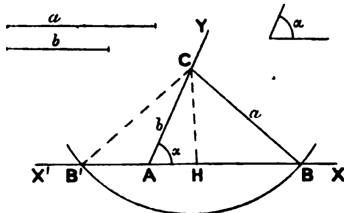


Fig. 115.

Discussion. — *Discuter* un problème, c'est chercher à quelles conditions doivent satisfaire les quantités données pour que le problème soit possible, et, dans le cas où il est possible, combien il a de solutions.

Ici, pour que le problème soit possible, il faut que la circonférence rencontre la *demi-droite* AX; ce qui exige d'abord que son rayon a soit supérieur ou au moins égal à la distance CH du point C à la droite AX :

$$a \geqq \text{CH}.$$

Or, quel que soit l'angle A, on a toujours

$$b \geqq \text{CH}.$$

Donc la condition $a \geqq$ CH sera remplie si l'on a

$$a > b.$$

Dans ce cas, la circonférence, décrite de C comme centre, avec a pour rayon, coupe la droite indéfinie AX en deux points B et B' *situés de part et d'autre de* A. Donc l'un de ces deux

points est sur la *demi-droite* AX et l'autre sur son prolongement AX'. Appelons B celui qui est situé sur AX : le triangle ABC répond à la question. L'angle B'AC est égal à $180° - \alpha$; donc le triangle AB'C ne convient pas, à moins que α ne soit égal à $90°$ et alors les deux triangles ABC, AB'C sont égaux, de sorte que, même dans ce cas, il n'y a encore qu'une solution.

Soit maintenant $a = b$. Dans ce cas, le triangle demandé doit être isoscèle et *il faut* que l'angle donné A soit aigu. Cette condition est *suffisante*; car alors $a > CH$ et la circonférence décrite de C comme centre, avec a ou b pour rayon, coupe AX en deux points A et B (fig. 116) et le triangle ABC répond à la question.

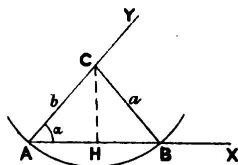


Fig. 116.

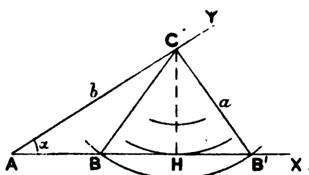


Fig. 117.

Soit enfin $a < b$. Dans ce cas, *il faut* que l'angle A soit aigu [50, remarque].

Supposons cette condition remplie (fig. 117). Si $a > CH$, le cercle décrit de C comme centre, avec a pour rayon, coupera AX en deux points B, B' et les deux triangles ABC, AB'C répondront à la question.

Si $a = CH$, le cercle est tangent en H à la droite AX et le triangle rectangle ACH est alors la solution unique du problème.

Si $a < CH$, il n'y a pas de solution.

RÉSUMÉ

$a > b$	. . . .	1 solution
$a = b$	$A < 90°$	1 solution
	$A \geq 90°$	pas de solution.

$a < b$	$A \geqq 90^\circ$		pas de solution
	$A < 90^\circ$	$a > CH$.	2 solutions
		$a = CH$.	1 solution : triangle rectangle.
		$a < CH$.	pas de solution.

116. Problème. — *Construire sur une droite donnée* AB (fig. 118) *un segment capable d'un angle donné* α.

Soient AMB le segment demandé, BT la tangente en B ; nous savons que $\widehat{ABT} = \alpha$. D'ailleurs, le rayon OB est perpendiculaire à BT et le centre O se trouve sur la perpendiculaire au milieu de AB. D'où la construction suivante :

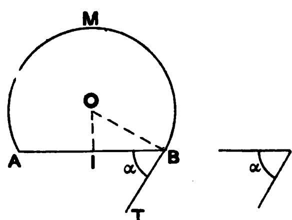


Fig. 118.

Au point B, faites un angle ABT, égal à α ; élevez la perpendiculaire au milieu de AB et la perpendiculaire à BT, au point B ; du point O d'intersection de ces deux perpendiculaires, avec OA pour rayon, décrivez un cercle : la portion AMB de ce cercle, située, par rapport à AB, du côté opposé à BT, est le segment demandé.

117. Problème. — *Mener une tangente à un cercle par un point donné.*

Soit A (fig. 119) le point donné et AB une tangente au cercle O, passant par ce point. Cette tangente est perpendiculaire à l'extrémité du rayon OB ; donc l'angle OBA est droit et le point B se trouve sur la circonférence de diamètre AO.

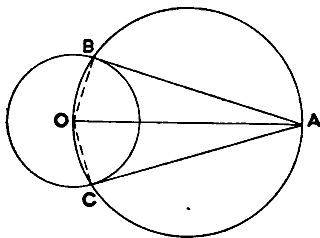


Fig. 119.

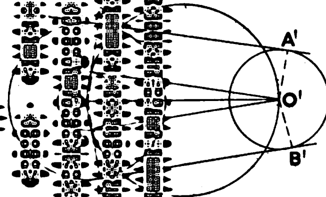
Réciproquement, si B est un point commun à la circon-

AO, l'angle
gente.
utant de tan-
re a de points
e OA, c'est-à-
t A est à l'ex-
onférence, ou

une tangente

du diamètre

nte commune



120.

mune qui laisse
ns les rayons
'; cette droite

de O comme

ce cercle et
conférence O,

on mène la tangente AA′ à cette circonférence, cette droite AA′ sera aussi tangente à la circonférence O′; car,en abaissant O′A′ perpendiculaire sur AA′, on aura $O'A' = CA = R'$.

Donc il y a autant de tangentes communes extérieures que l'on peut mener par le point O′ de tangentes au cercle, de centre O, et de rayon $R - R'$; c'est-à-dire deux, une ou aucune, selon que l'on aura

$$OO' > R - R', \quad OO' = R - R', \quad \text{ou} \quad OO' < R - R'.$$

Remarque. — Si $R = R'$, on vérifie sans peine, en reprenant le raisonnement ci-dessus, qu'il y a toujours deux tangentes communes extérieures parallèles à OO′.

On prouve absolument de la même manière qu'il y a autant de tangentes communes *intérieures* que l'on peut mener par le point O′ de tangentes au cercle de

Fig. 121.

centre O (fig. 121) et de rayon $OC = R + R'$; c'est-à-dire deux, une ou aucune, selon que

$$OO' > R + R', \quad OO' = R + R', \quad \text{ou} \quad OO' < R + R'.$$

En résumé,

1° Deux cercles *extérieurs* ont quatre tangentes communes : deux extérieures et deux intérieures ;

... ont trois tan-
... ne intérieure ;
... ntes communes

... ont une tan-

... tangente com-

... côtés.
... hon parallèles, on
... dont on connaît
... et en déduire le

... gentes communes
... gentes communes
... O et O'.

... O et O' sont tan-

... et O', mener une
... re les deux cercles

... ABB' et OD per-

... sécante est paral-

... côté BC, l'angle
... tres côtés.
... = AC, on aura

... AC,

... , etc.

... $\frac{1}{2}(C - B)$,

ce qui permet de construire un triangle, connaissant un côté, la différence des angles adjacents et la somme ou la différence des deux autres côtés.

5. Construire un cercle tangent à un cercle et à une droite donnés, connaissant le point de contact avec le cercle ou avec la droite.

— On démontrera que la droite, qui joint ces deux points de contact, passe par l'une des extrémités du diamètre du cercle donné perpendiculaire, à la droite donnée.

6. Etant donnés trois points A, B, C, trouver un quatrième point du plan, d'où l'on voie AC et BC sous des angles donnés α et β.

— On construira, sur AC et sur BC, des segments capables des angles α et β.

7. Inscrire à un triangle donné ABC un triangle égal à un triangle donné DEF.

— On commence par circonscrire à DEF un triangle égal à ABC; pour cela, on décrit sur DE et sur DF des segments capables des angles C et B, et on mène par D une sécante telle que la partie comprise entre les deux cercles soit égale à BC [ex. 3].

8. Construire un triangle, connaissant une bissectrice, une médiane et une hauteur issues d'un même sommet.

— On placera ces trois droites et on remarquera que la bissectrice et la médiatrice se coupent sur le cercle circonscrit.

9. Construire un triangle, connaissant :

1° La base, l'angle opposé et la hauteur correspondante;

2° Un côté ou un angle et deux hauteurs;

3° Un angle, la hauteur correspondante et le rayon du cercle inscrit;

4° Le périmètre et deux des rayons des cercles inscrit et exinscrits ;

5° Un angle, la somme des côtés de cet angle et le rayon du cercle inscrit ;

6° La différence de deux côtés et les rayons des cercles inscrit et exinscrit dans l'angle formé par ces deux côtés ;

7° La bissectrice d'un angle, la hauteur correspondante et le rayon du cercle inscrit ;

8° Le périmètre, un angle et la bissectrice correspondante ;

9° Un angle, la bissectrice correspondante et une hauteur.

10. Inscrire à un carré un triangle équilatéral ayant un sommet en un sommet du carré.

11. Construire un triangle ABC, connaissant deux côtés AB, AC et la médiane AD issue du point A. — Si l'on prolonge AD d'une longueur DE $=$ AD, on a EC $=$ AB ; donc on connaît les trois côtés du triangle ACE, etc.

[illegible] issant les quatre
[illegible] N des deux côtés
[illegible] mmet du parallélo-
[illegible] ilieu de EC; dans
[illegible] BC, et la médiane

[illegible] ngents intérieure-
[illegible] yons de ce cercle

[illegible] t tangents à une
[illegible] la somme ou la

[illegible] d'eux une droite,
[illegible] aux deux autres

[illegible] e deux droites ou

[illegible] droite, mener par
[illegible] né en deux points
[illegible] nné avec la droite

[illegible] droite XY, trouver
[illegible] X soit double de

[illegible] d'autre de XY, la
[illegible] angent à XY. Dans
[illegible] nts par son symé-

[illegible] t les deux côtés
[illegible] angle C.
[illegible] = AB ; le triangle

[illegible] PLANE

[illegible] place dans son
[illegible] on que les dis-

tances mutuelles des points de la figure restent invariables, ainsi que les angles formés par les droites qui joignent ces points deux à deux.

Nous avons déjà étudié le cas, où l'un des points de la figure reste fixe [27]. Dans ce cas, le déplacement s'appelle *rotation* et tous les points de la figure tournent du même angle autour du point fixe.

Soient (fig. 122) O le point fixe ; A, B deux points de la figure, que la rotation amène en A', B'; OC une demi-droite parallèle à AB et de même sens, invariablement liée à la figure ; OC' la position de cette demi-droite après la rotation. L'angle de $\overline{A'B'}$ avec $\overline{AB}$ est, par définition, égal à $\widehat{COC'}$, par suite, égal à $\widehat{AOA'}$: c'est ce qu'on exprime en disant que *toutes les droites, qui joignent deux points de la figure, tournent du même angle et dans le même sens.*

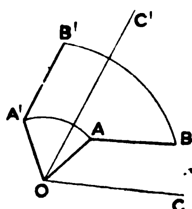


Fig. 122.

121. Si on fixe deux points de la figure, elle ne peut plus bouger. Par conséquent,

La position d'une figure plane indéformable, mobile dans son plan, est déterminée par celle de deux de ses points.

TRANSLATION

122. Définition. — Quand tous les points d'une figure décrivent des portions de droites parallèles à une même direction, de même sens et égales, le déplacement de la figure s'appelle *translation*.

Pour démontrer que ce mouvement est possible sans que la figure se déforme, considérons une direction

arbitraire XX′ (fig. 123), et soient A et B, deux points appartenant à la figure, ou invariablement liés avec elle, situés sur une droite YY′ parallèle à XX′; déplaçons la figure de manière que les points A et B glissent sur YY′ dans le sens AB, par exemple, et viennent en A′ et B′. Le chemin BB′, parcouru par le point B, est égal au chemin AA′, parcouru par le point A; car AB = A′B′, puisque la figure ne se déforme pas; donc, si de la ligne totale ABB′, on retranche successivement AB et A′B′, les restes BB′ et AA′ sont égaux. Tous les points de la figure, situés sur AB, ou sur son prolongement, glissent sur YY′ dans le même sens que A, et on démontre, comme pour le point B, qu'ils parcourent des chemins égaux à AA′. Soit C un point de la figure, non situé sur la droite AB; abaissons CD perpendiculaire sur AB et considérons cette droite CD comme invariablement liée à la figure. Quand la figure se déplace de la façon indiquée, le point D glisse sur YY′, dans le même sens que A, et parcourt un chemin DD′ égal à AA′. La droite DC se déplace sans changer de longueur et sans cesser d'être perpendiculaire à AB, par suite, à YY′; donc le point C décrit une portion de droite CC′ égale et parallèle à DD′, ou à AA′, et de même sens. — C. q. f. d.

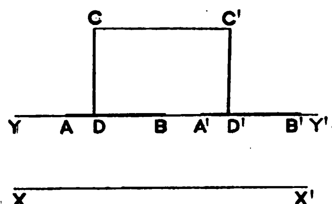


Fig. 123.

123. On nomme une translation par deux lettres, AA′, qui désignent les positions initiale et finale d'un point de la figure.

124. **Théorème.** — *Pendant la translation, toutes les*

[illegible] *parallèlement à elles-*

[illegible] nts de la figure, que [illegible] Comme AA′, BB′ sont [illegible] ens, le quadrilatère [illegible] onc AB et A′B′, sont [illegible]

[illegible] TRANSLATIONS. — Sup- [illegible] emière translation AA′ [illegible] la figure AB... en [illegible] deuxième translation [illegible] en A″B″...; et qu'une [illegible] tion amène A″B″... en [illegible]

[illegible] i précède, les droites [illegible] parallèles, de même [illegible] donc le quadrilatère [illegible]; donc AA‴, BB‴, ... [illegible] gales. Par conséquent, [illegible] sur A‴B‴... par une [illegible] elle la *résultante* des [illegible], A″A‴.

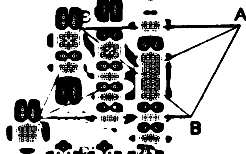
[illegible] ltante AA‴ est repré- [illegible] *lygone* AA′A″A‴.

[illegible], A′B′C′..., *deux posi-* [illegible] *ble qui se déplace dans* [illegible] *peut toujours l'amener* [illegible] *de par une rotation ou* [illegible]

[illegible] est déterminée par

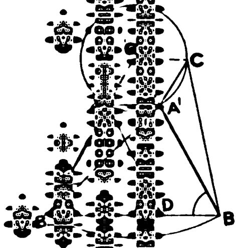
... montrer qu'on
... égale A′B′

... ns (fig. 125).
... e, donc AA′
... s ; donc on
... AA′.



... s contraires
... élogramme ;
... donc on peut
... o° autour du

... 127).
... ′ quand on
... manière que



... 8.

... le centre du
... r le triangle

ABA′ de l'angle AOA′ autour du point O : AA′ viendra s'appliquer sur A′C et AB sur A′B′.

127. Cas particulier. — Supposons AA′ parallèle à BB′ (fig. 128). Soit O le point de rencontre des droites AB et A′B′ ; en menant par A la parallèle à A′B′, qui rencontre BB′ en D, le triangle ABD est isoscèle ; donc les triangles OBB′, OAA′ sont aussi isoscèles :

$$OB = OB', \quad OA = OA';$$

donc on peut amener AB sur A′B′ en le faisant tourner de l'angle AOA′ autour du point O.

128. Ainsi, dans le cas général, on peut amener la figure de la position ABC... à la position A′B′C′... par une rotation autour d'un point O, qu'on appelle le *centre de rotation*. D'ailleurs, ce point étant équidistant de A et de A′, de B et de B′, ... se trouve à l'intersection des perpendiculaires élevées aux milieux de AA′, de BB′, de CC′, ... (fig. 129). Donc toutes ces perpendiculaires concourent en un même point.

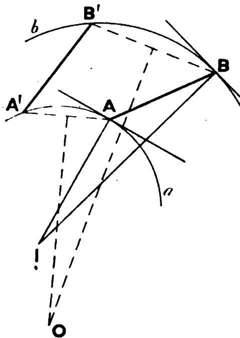


Fig. 129.

129. Considérons (fig. 129) les lignes *a*, *b*, *c*,... parcourues par les différents points de la figure A′B′C′..., quand cette figure se déplace d'une façon quelconque ; et supposons que cette figure se rapproche indéfiniment de la position ABC... Les droites AA′, BB′, CC′,... ont pour limites les tangentes aux *trajectoires a*, *b*, *c*,... en A, B, C,... Donc les perpendiculaires aux milieux de AA′, BB′, CC′,... deviennent les normales à ces trajectoires en A, B, C,... ; comme elles n'ont pas

cessé de concourir en un même point, nous en concluons que :

Si une figure plane indéformable se déplace dans son plan, pour chaque position de la figure, les normales aux lignes décrites par ses différents points se coupent en un même point I, *qu'on nomme* LE CENTRE INSTANTANÉ DE ROTATION.

EXERCICES

1. Les extrémités d'une droite de longueur constante glissent sur deux droites fixes, ou sur deux cercles fixes. Trouver le centre instantané de rotation.

2. Etant donné un triangle équilatéral ABC, quel est le point autour duquel il faut faire tourner le côté AB pour l'amener en CD, sur le prolongement de AC ?

3. Une figure plane indéformable glisse dans son plan ; on sait qu'un point de cette figure d'abord situé en A se trouve finalement en A′ et que la figure a tourné d'un angle de 60°, dans un sens déterminé. Construire le centre de la rotation qui donne à la figure le même déplacement final que celui qui vient d'être défini. (Baccalauréat, Rennes, 1896.)

4. On donne trois points O, A, B non en ligne droite. On porte sur les droites AO, BO, à partir des points A et B, et du même côté de AB, des longueurs AC, BD égales à h. On porte aussi sur les mêmes droites, mais de part et d'autre de AB, des longueurs AC′, BD′ égales à h'.

1° Démontrer que la perpendiculaire à CD, en son milieu, passe par un point fixe ω, quand h varie. Démontrer de même que la perpendiculaire à C′D′, en son milieu, passe par un point fixe ω', quand h' varie.

2° Construire la droite CD, connaissant sa longueur. — Même question pour la droite C′D′. (Concours général, 1885.)

— On remarquera que $\widehat{C\omega D} = \widehat{A\omega B}$ et $\widehat{C'\omega' D'} = \widehat{A\omega' B}$.

LIVRE III

CHAPITRE PREMIER

VECTEURS

130. Le segment de droite AB (fig. 130) parcouru en allant de A en B s'appelle le *vecteur* ou *segment* AB :



Fig. 130.

A est l'*origine*, B l'*extrémité*. Ce même segment parcouru de B vers A s'appelle le *vecteur* BA.

Sur la droite XY, qui porte le vecteur AB, on peut se déplacer dans deux sens différents, le sens XY ou le sens YX; l'un de ces sens, celui qu'on veut, s'appelle le sens *positif*, l'autre est le sens *négatif*. Le vecteur AB est dit *positif* ou *négatif*, selon qu'il est parcouru dans le sens que l'on regarde comme positif, ou dans le sens contraire.

Quand on considère plusieurs vecteurs portés par des droites parallèles, il est entendu que le sens choisi comme positif est le même pour toutes ces droites, à moins que le contraire ne soit spécifié.

On appelle *mesure algébrique* d'un vecteur AB et on désigne par $\overline{AB}$ le nombre algébrique ayant pour valeur absolue la longueur de ce vecteur et pour signe, + ou —, selon que ce vecteur est positif ou négatif.

Il résulte de cette définition que $\overline{AB}$ et $\overline{BA}$ sont égaux en valeur absolue, mais de signes contraires :

$$\overline{AB} + \overline{BA} = 0, \quad \text{ou} \quad \overline{AB} = -\overline{BA}.$$

On dit que deux vecteurs sont *parallèles* quand ils sont portés par la même droite ou par des droites parallèles.

On appelle *produit* et *rapport de deux vecteurs parallèles* le produit et le rapport de leurs mesures algébriques.

Nous continuerons à désigner par AB la valeur absolue du vecteur AB, c'est-à-dire le nombre qui mesure la longueur de ce vecteur. Ainsi,

$$\overline{AB} = +AB, \quad \text{ou} \quad \overline{AB} = -AB,$$

selon que le vecteur AB est positif ou négatif.

131. **Théorème.** — *Étant donné un nombre quelconque de points* A, B, C,..., L, *sur une droite, on a*

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \ldots + \overline{LA} = 0.$$

La relation est vraie, par définition, pour deux points. Considérons trois points en ligne droite A, B, C. Si B est entre A et C (fig. 130) et que le sens positif soit celui de A vers C, il est évident que

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}, \quad \text{ou} \quad \overline{AB} + \overline{BC} - \overline{AC} = 0.$$

Mais $-\overline{AC} = \overline{CA}$, donc

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0.$$

De même, si B est entre A et C et que le sens positif soit celui de C vers A, on a

$$\overline{CA} = \overline{CB} + \overline{BA}, \quad \text{ou} \quad \overline{CA} - \overline{CB} - \overline{BA} = 0;$$

d'où $\overline{CA} + \overline{BC} + \overline{AB} = 0$, ce qui donne la même relation que dans le premier cas.

Même raisonnement quand le point C est entre A et B, ou le point A entre B et C.

La proposition est donc vraie pour trois points. Cela étant, si elle est vraie pour $n - 1$ points A, B, C,..., K, elle sera encore vraie avec un point de plus; car des relations

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \ldots\ldots + \overline{KA} = 0,$$
$$\overline{AK} + \overline{KL} + \overline{LA} = 0,$$

on déduit, en ajoutant membre à membre et en tenant compte de $\overline{AK} + \overline{KA} = 0$,

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \ldots\ldots + \overline{KL} + \overline{LA} = 0.$$

Cette relation, qu'on appelle la *formule de Chasles* [1], est donc vraie, quel que soit le nombre des points.

Corollaire. — On en déduit

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \ldots\ldots + \overline{KL} = -\overline{LA} = \overline{AL}.$$

En particulier, pour trois points A, B, C, on a

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$

D'où

$$\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB}.$$

Cette dernière formule permet de remplacer un vecteur BC par une différence entre deux autres vecteurs ayant pour origine commune un point quelconque de la droite BC et pour extrémités, *le premier l'extrémité et le second l'origine* du vecteur BC.

---

(1) Chasles, célèbre géomètre français (1793-1880).

… LE POINT M

… if, car $\overline{MA}$ et

… $\frac{AB}{MB}$.

… gment AB de
… ure que M se
… inue et nous
… à tout nombre
… ait $\lambda < -a$,

… nd M se rap-
… ris entre A et

… car $\overline{MA}$ et $\overline{MB}$

Donc, dans ce cas,

$$\lambda = + \frac{MA}{MB} = \frac{MB + BA}{MB}$$

ou

$$\lambda = 1 + \frac{BA}{MB}.$$

Si M se rapproche indéfiniment de B, $\frac{BA}{MB}$ augmente ; donc λ augmente aussi et on montre comme ci-dessus qu'il finit par dépasser tout nombre positif donné d'avance ; c'est ce qu'on exprime en disant qu'il *croît indéfiniment*. Si, au contraire, M s'éloigne indéfiniment de B, λ diminue et *tend vers 1*. En effet, soit α un nombre positif donné aussi petit qu'on voudra ; la différence entre λ et 1 sera moindre que α si

$$\frac{AB}{MB} < \alpha, \quad \text{ou} \quad MB > \frac{BA}{\alpha}.$$

3° Quand le point M est à gauche de A, λ est positif, car $\overline{MA}$ et $\overline{MB}$ sont de même signe ; donc, dans ce cas,

$$\lambda = + \frac{MA}{MB} = \frac{MB - AB}{MB}$$

ou

$$\lambda = 1 - \frac{AB}{MB}.$$

On en conclut, en raisonnant comme ci-dessus, que si le point M part de A et s'éloigne indéfiniment vers la gauche, λ augmente à partir de 0 et se rapproche indéfiniment de 1.

En résumé, λ décroît de 0 à $-\infty$ (lisez: *moins l'infini*), quand M décrit le segment AB ; de $+\infty$ à $+1$ quand M décrit le prolongement de AB au delà de B, et il croît de

o à + 1 quand M décrit le prolongement de BA au delà de A. Donc λ prend une fois, et une fois seulement, toutes les valeurs positives ou négatives, sauf la valeur + 1.

Pour combler cette lacune, nous dirons que $\lambda = 1$ quand le point M est *à l'infini* à droite ou à gauche, et, pour qu'il n'existe qu'une position de M correspondant à chaque valeur de λ, nous dirons que *le point à l'infini à droite* est le même que *le point à l'infini à gauche.*

Quand M est en B, le rapport $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ n'existe plus : nous conviendrons de dire qu'il est égal à $+\infty$, ou à $-\infty$, ou simplement à ∞.

Ainsi, *il existe sur la droite indéfinie* XY *un point* M *tel que* $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ *ait une valeur donnée,* ET IL N'EN EXISTE QU'UN. Par conséquent, si M et M' sont deux points de cette droite tels que $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{M'A}}{\overline{M'B}}$, on pourra en conclure que ces deux points coïncident.

DIVISION HARMONIQUE

133. Soit C un point quelconque de la droite AB (fig. 132). Il existe sur cette droite un point D tel que

M
O A C B D

Fig. 132.

$$\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = -\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}. \qquad (1)$$

Ce point D est dit *conjugué harmonique* de C par rapport à A et B.

L'égalité précédente pouvant être mise sous la forme

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = -\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}},$$

on en conclut que A et B sont aussi conjugués harmoniques

par rapport à C et D. On dit encore que les quatre points A, B, C, D forment une *division harmonique*, en ayant soin d'énoncer ces quatre points de façon que les deux premiers soient conjugués par rapport aux deux derniers, et réciproquement.

On déduit encore de (1) :

$$\frac{AD}{AC}=\frac{BD}{CB}=\frac{AD+BD}{AC+CB}=\frac{AD-BD}{AC-CB}$$

ou, M étant le milieu de AB :

$$\frac{AD}{AC}=\frac{BD}{CB}=\frac{MD}{AM}=\frac{AM}{MC}.$$

Ces relations sont très utiles. On en tire encore :

$$\overline{AM}^2=MC.\ MD.$$

EXERCICES

1. Soient A, B, C, O quatre points en ligne droite. Démontrer qu'on a

$$\overline{OA}.\ \overline{BC}+\overline{OB}.\ \overline{CA}+\overline{OC}.\ \overline{AB}=0, \qquad (1)$$

$$\overline{OA}^2.\ \overline{BC}+\overline{OB}^2.\ \overline{CA}+\overline{OC}^2.\ \overline{AB}+\overline{BC}.\ \overline{CA}.\ \overline{AB}=0. \qquad (2)$$

— En remplaçant $\overline{BC}$ par $\overline{OC}-\overline{OB}$, $\overline{CA}$ par $\overline{OA}-\overline{OC}$, $\overline{AB}$ par $\overline{OB}-\overline{OA}$, on constate que les premiers membres de ces deux relations s'annulent identiquement.

En posant $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}=-\frac{\beta}{\alpha}$, la relation (1) devient

$$(\alpha+\beta)\ \overline{OC}=\alpha.\overline{OA}+\beta.\overline{OB}. \qquad (3$$

La formule (1) est due à Euler, célèbre mathématicien suisse du xviiie siècle, et la formule (2) à Stewart, géomètre écossais de la même époque.

2. Pour que quatre points A, B, C, D forment une division harmonique, il faut et il suffit que

$$\overline{AB}.\overline{CD}=2\overline{BC}.\overline{DA}.$$

En appelant M le milieu de AB, la relation qui définit la conju-

[illegible] peut encore se

[illegible]

[illegible]ES

[illegible], BB′, CC′,... [illegible] *courantes* XOY, [illegible]

[illegible] segments OA, AB [illegible] A′B′.

[illegible]

[illegible] rapport $\frac{OA}{AB}$ soit [illegible]

[illegible]

[illegible] en trois parties [illegible] compose de deux [illegible] Mais, en me- [illegible] voit que OA′ [illegible] en trois parties. [illegible] le, D′A′ = E′F′.

En effet, menons par D′ et E′ les parallèles à XY, qui rencontrent AA′ et FF′ en G et H. Les triangles D′GA′, E′HF′ sont égaux comme ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun : D′G = E′H, car D′G = DA et E′H = EF ; les angles GD′A′, HE′F′ sont égaux comme correspondants et les angles D′GA′, E′HF′ sont égaux comme ayant leurs côtés parallèles et de même sens. On en conclut que D′A′ = E′F′.

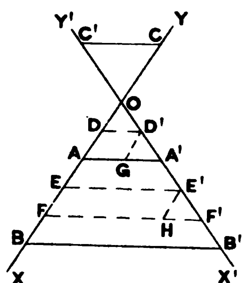


Fig. 133.

Par conséquent,

$$\frac{OA'}{A'B'} = \frac{2}{3} = \frac{OA}{AB}.$$

On traite ensuite le cas où $\frac{OA}{AB}$ est irrationnel en raisonnant comme au n° 95. Ainsi, dans tous les cas, les rapports $\frac{OA}{AB}$, $\frac{OA'}{A'B'}$ sont égaux.

On prouve de même que

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}, \quad \frac{OA}{OC} = \frac{OA'}{OC'}, \quad \frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}, \text{ etc.}$$

Remarque. — Les segments OA′, A′B′, sont de même sens ou de sens contraires selon que les segments OA, AB sont eux-mêmes de même sens ou de sens contraires. Donc, dans tous les cas, on a, en grandeur et en signe,

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{A'B'}};$$

de même,

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}}, \text{ etc.}$$

135. Corollaire. — *Si, dans un triangle* ABC, *on mène une parallèle au côté* BC, *qui rencontre les deux autres*

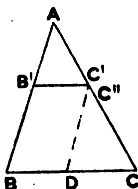


Fig. 134.

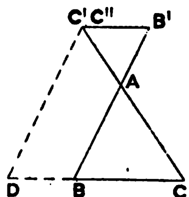


Fig. 135.

côtés AB, AC (fig. 134) *ou leurs prolongements* (fig. 135) *en* B', C', *on a*

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}}.$$

En effet, en menant par C' la parallèle à AB, qui rencontre BC en D, on a [134]

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}}, \quad \overline{BD} = \overline{B'C'};$$

donc

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}}.$$

136. Réciproquement, *étant donnés un triangle* ABC *et deux points* B' *et* C' *situés, l'un sur* AB *ou sur son prolongement, l'autre sur* AC *ou sur son prolongement, si*

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}},$$

B'C' *est parallèle à* BC.

En effet, menons par B' la parallèle à BC, qui rencontre AC en C''; on a

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC''}}{\overline{AC}}.$$

D'où, en comparant avec l'hypothèse,

$$\frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC''}}{\overline{AC}};$$

d'où $\overline{AC'} = \overline{AC''}$. Donc le point C′ coïncide avec C″.

C. q. f. d.

137. Plus généralement, *soient* ABCD (fig. 136) *un trapèze et deux points* E *et* F *situés sur les côtés non parallèles* AD, BC *ou sur leurs prolongements, si*

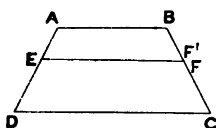


Fig. 136.

$$\frac{\overline{EA}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{FB}}{\overline{FC}},$$

EF *est parallèle à* AB *et à* CD.

En effet, menons par E la parallèle à AB, qui rencontre BC en F′; on a [134]

$$\frac{\overline{EA}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{F'B}}{\overline{F'C}}.$$

D'où, en comparant avec l'hypothèse,

$$\frac{\overline{FB}}{\overline{FC}} = \frac{\overline{F'B}}{\overline{F'C}};$$

par conséquent, F coïncide avec F′ [132].

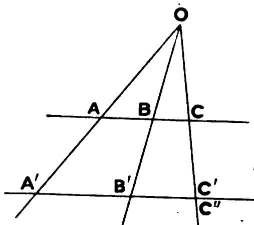


Fig. 137.

Corollaire. — *La droite qui joint les milieux des côtés non parallèles d'un trapèze est parallèle aux bases.*

138. **Théorème.** — *Plusieurs droites passant par un même point* O (fig. 137) *déterminent sur deux parallèles des segments proportionnels.*

Soient A, B, C; A′, B′, C′, les points où ces droites rencontrent les deux parallèles; on a

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}}, \qquad \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}.$$

Par conséquent,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}.$$

Réciproquement, *soient* A, B, C, *trois points d'une droite et* A′, B′, C′, *trois points d'une autre droite parallèle à la première, si*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}},$$

les trois droites AA′, BB′, CC′ *concourent en un même point (à moins qu'elles ne soient parallèles).*

En effet, si AA′ et BB′ se rencontrent en un point O, menons OC, qui rencontre A′B′ en un point C″. D'après ce qui précède, on a

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C''}};$$

d'où, en comparant avec l'hypothèse,

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C''}};$$

d'où $\overline{B'C'} = \overline{B'C''}$; donc C′ et C″ coïncident.

139. **Théorème.** — *La bissectrice intérieure ou extérieure d'un angle d'un triangle détermine sur le côté opposé des segments proportionnels aux côtés adjacents. Et réciproquement.*

Soient AD la bissectrice de l'angle A du triangle ABC (fig. 138) et AE la bissectrice de l'angle extérieur CAH.

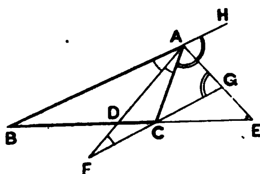


Fig. 138.

Il s'agit de prouver que

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{EB}{EC}.$$

En effet, menons par C la parallèle à AB, qui rencontre AD en F et AE en G. On a [135]

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{CF}, \quad \frac{EB}{EC} = \frac{AB}{CG}.$$

Reste à prouver que CF = AC = CG, ou que les triangles CAF, CAG sont isoscèles. Or $\widehat{F} = \widehat{BAF}$, comme alternes internes, et $\widehat{BAF} = \widehat{FAC}$, puisque AF est bissectrice de l'angle A; donc $\widehat{F} = \widehat{FAC}$ et le triangle CAF est isoscèle. On prouve de même que $\widehat{CGA} = \widehat{GAH} = \widehat{GAC}$; donc le triangle CAG est isoscèle.

140. Les vecteurs DB et DC sont de sens contraires, donc $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}$ est négatif; au contraire, $\frac{\overline{EB}}{\overline{EC}}$ est positif. Par conséquent,

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = -\frac{AB}{AC}, \quad \frac{\overline{EB}}{\overline{EC}} = +\frac{AB}{AC}.$$

Ces égalités définissent complètement la position des points D et E. Par conséquent, si, par un moyen quelconque, on a trouvé sur la droite BC deux points D et E vérifiant ces égalités, ces deux points seront, l'un le pied de la bissectrice intérieure, l'autre le pied de la bissectrice extérieure.

Les quatre points B, C, D, E forment une division harmonique [133].

141. Problème. — *Étant donnés deux points* A *et* B (fig. 139), *trouver sur la droite indéfinie* AB *un point tel que le rapport de ses distances aux deux points* A *et* B *soit égal au rapport de deux longueurs données m et n.*

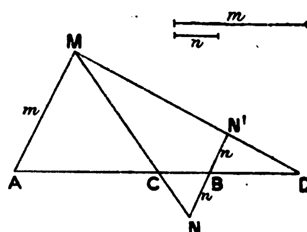


Fig. 139.

Il y a *deux* points répondant à la question : l'un C, situé entre A et B et tel que

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{m}{n},$$

l'autre D, situé sur le prolongement de AB, d'un côté ou de l'autre, et tel que

$$\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = +\frac{m}{n}.$$

On dit que ces deux points partagent, *intérieurement* et *extérieurement*, la droite AB dans le rapport $\frac{m}{n}$. Ces deux points sont conjugués harmoniques par rapport à AB.

Pour les construire, menons par A et B deux parallèles, prenons sur la première une longueur AM $= m$ et sur la seconde, de part et d'autre de B, deux longueurs BN $=$ BN' $= n$, et traçons MN et MN' : ces deux droites couperont AB aux deux points cherchés C et D ; car

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{BN}} = -\frac{m}{n},$$

$$\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{BN'}} = +\frac{m}{n}.$$

142. ***Théorème***. — *Le lieu des points, dont les distances à deux points fixes* A *et* B (fig. 140) *soient dans un rapport donné* λ, *est une circonférence ayant pour diamètre la droite qui joint les deux points qui divisent intérieurement et extérieurement la droite* AB *dans le rapport* λ.

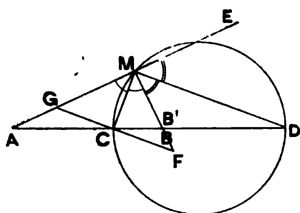


Fig. 140.

Soit M un point du lieu cherché, c'est-à-dire tel que

$$\frac{MA}{MB} = \lambda.$$

Soient C et D les points qui divisent, intérieurement et extérieurement, la droite AB dans le rapport λ :

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\lambda, \quad \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = +\lambda.$$

On en conclut que

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{MA}{MB}, \quad \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = +\frac{MA}{MB}.$$

Donc les droites MC et MD sont les bissectrices intérieure et extérieure de l'angle AMB. Par suite, l'angle CMD est droit, et le point M est sur la circonférence décrite sur CD comme diamètre.

Réciproquement, tous les points de cette circonférence sont des points du lieu. En effet, soit M un point de cette circonférence. Traçons MA, MC, MD et menons une droite MB′ telle que MC soit bissectrice de l'angle AMB′ et soit B′ le point de rencontre de cette droite avec CD ; l'angle CMD étant droit, la droite MD sera la

. Donc [140]
pport à CD ;
ide avec B et

ment que MC
par C la pa-
re à MC, qui

ment, les trian-
me ayant les
chacun, MC

la perpendi-

B (fig. 141) *en*
nées m, n, p.
r A, prenons
$= n$, NP $= p$;

PB, qui rencontrent
n C et D : nous au-

$$= \frac{CD}{n} = \frac{DB}{p}.$$

même procédé per-
e diviser la droite AB
nombre quelconque
rties égales ; il suffit
AM, MN, NP égales

nombre x est la *qua-*
nbres donnés a, b, c

on a $x = \frac{b^2}{a}$ et on dit
à a et à b.
trique ou *proportion-*

$\sqrt{ab}$.

quatrième propor-
b, c.

[illegible] le nombre qui [illegible] le aux nombres [illegible] cela quelle que [illegible]

[illegible] 142), portons [illegible] autre côté, une [illegible]

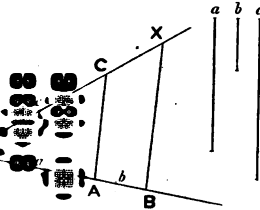


Fig. 142.

[illegible] proportionnelle [illegible] c dans la cons- [illegible]

[illegible] *les.* — Désignons [illegible] x une longueur [illegible]

[illegible] la longueur x [illegible]

[illegible]

[illegible] longueur x définie [illegible]

[illegible]

[illegible] que le dénomi- [illegible]

elle que $\beta = \frac{ab}{b'}$, on a

construire

à d', d, γ.

nels de degré $n + 1$ et
gré n, formés avec des
onnées ; on peut cons-

rbitraire, qu'on pourra
gnes données, on peut

$$\frac{\frac{C}{\lambda^n}}{\frac{C'}{\lambda^{n-1}}}.$$

$\frac{A}{\lambda^n}, \ldots, \frac{C'}{\lambda^{n-1}}$ représen-
onstruire (2°). En dési-
, on a

;

e la quatrième propor-
: $\alpha' + \beta' - \gamma'$, λ et

ogène du premier degré

... ogues à la précé-

... C sont de degré
... n désignant tou-
... a construire une

... un même point qui
... posé.
... ABC, O leur point
... gal à $\frac{AB}{2}$. Donc
... c.

... iangle s'appelle le

... le milieu O de la
... le côté AC en un
... $\frac{A}{C}$ et $\frac{OB}{OE}$?
... le point D est un
... $= \frac{BD}{BC}$.
... nces des sommets
... oduit de la distance
... ectrice extérieure.

... s perpendiculaires
... gente soient entre

[illegible] cercle O, on mène une [illegible] et on prend le point B′ [illegible] re PO. Prouver que la [illegible] endant de la direction de [illegible]

[illegible] mener une sécante telle [illegible] cercles sur cette sécante [illegible]

[illegible] un angle, un côté et le [illegible]

[illegible] s deux bases, le rapport [illegible]

[illegible] un angle, les deux côtés [illegible]

[illegible] ux parallèles qui fassent [illegible] arallélogramme dont les [illegible] urs données.

[illegible] es à deux cercles donnés [illegible] deux cercles.

[illegible] le point de rencontre des [illegible] es sont en ligne droite.

[illegible] II

[illegible] ÉTIQUES

[illegible] F′ sont *homothétiques* [illegible] fixe S et un nombre [illegible] orrespondre les points [illegible], de façon que deux [illegible] s, M et M′, soient en [illegible] fient la relation

[illegible]

[illegible] *thétie* des deux [illegible]

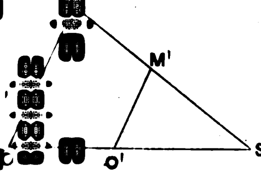


Fig. 143.

[illegible] *homologues*. De [illegible] (fig. 143), sont [illegible] extrémités sont [illegible] es sont *homo-* [illegible], etc.

[illegible] *logues* OM, O'M' [illegible]

$$[illegible] \qquad (1)$$

[illegible] par suite [135],

[illegible]

[illegible] *de la première* [illegible] *logues dans la* [illegible]

[illegible] *est une droite*

[illegible] *d'une droite* [illegible] *elle-même.*

s est égal à celui de

d'un polygone est un
le ces deux polygones
t leurs angles homo-

points homologues de
rallèles.

infiniment voisins de
s points homologues
, M'N' étant parallèles,
ont les limites de ces

d'une circonférence est
ces deux circonférences
s rayons sont dans le
) décrit une circonfé-
e décrit une circonfé-
st constant, O'M' l'est

s sont homothétiques,
ussi un.

ux figures F *et* F' *soient*
u'il existe deux points
correspondre les points
, de façon que les vec-
eux points fixes à deux
M, M', *soient parallèles*

].
est remplie, soit k la

valeur constante du rapport $\frac{\overline{O'M'}}{\overline{OM}}$, que nous supposons *différent de* $+ 1$, et soit S (fig. 143), le point de rencontre de MM′ avec OO′ ; on a [135]

$$\frac{\overline{SO'}}{\overline{SO}} = \frac{\overline{O'M'}}{\overline{OM}} = k.$$

Donc le point S est fixe et, comme $\frac{\overline{SM'}}{\overline{SM}} = \frac{\overline{O'M'}}{\overline{OM}} = k$, les deux figures sont homothétiques.

Si maintenant $k = +1$, le vecteur MM′ est parallèle à OO′ et de même sens ; donc on peut amener la figure F sur la figure F′ par une translation $\overline{OO'}$ et ces deux figures sont *directement superposables.* On peut encore dire qu'elles sont homothétiques, mais que le centre d'homothétie S est à l'infini.

Remarque. — S'il y a un couple de points O,O′, il y en a une infinité.

Corollaires. — I. — *Deux cercles* O *et* O′ (fig. 144) *peuvent être considérés soit comme directement homothétiques*, si on fait correspondre les extrémités M et M′ de deux rayons OM, O′M′, parallèles et de même sens, *soit comme inversement homothétiques*, si on fait correspondre les extrémités M et M″ de deux rayons OM, O′M″, parallèles et de sens contraires.

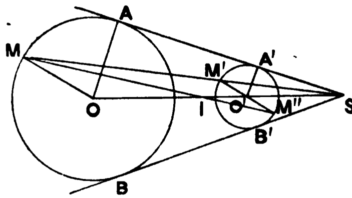


Fig. 144.

Les deux centres d'homothétie directe ou inverse, S, I, sont à l'intersection de la droite des centres OO′ avec

[illegible] les extrémités de deux [illegible] ou de sens contraires. [illegible] et R′, ces deux points [illegible]

$$[illegible] = -\frac{R'}{R}.$$

[illegible] homothétie [149, V]. [illegible] ieures AA′, BB′ passent [illegible] cte ; car les rayons OA, [illegible] contact sont parallèles [illegible] tangentes communes [illegible] d'homothétie inverse. [illegible] éthode pour construire [illegible] cercles : on construit [illegible] I : les tangentes à l'un [illegible] eux points sont les tan-[illegible]

[illegible] *mothétiques à une troi-[illegible] entre elles et les centres [illegible] thétie de ces trois figures [illegible] ées deux à deux sont en [illegible] oite.*

[illegible] t S″ (fig. 145) le centre [illegible] rapport d'homothétie [illegible] res F′ et F ; S′ le centre [illegible] rapport d'homothétie [illegible] elconque de F et M′, M″, [illegible] ons sur la droite S′S″, [illegible] es points O′, O″ tels que

$$[illegible] = \frac{\overline{S'M''}}{\overline{S'M}} = k'.$$

Nous savons [149] que les vecteurs O′M′, O″M″ sont parallèles à OM, par conséquent parallèles entre eux, et que

$$\frac{\overline{O'M'}}{\overline{OM}} = k'', \quad \frac{\overline{O''M''}}{\overline{OM}} = k';$$

d'où $\dfrac{\overline{O'M'}}{\overline{O''M''}} = \dfrac{k''}{k'}$; donc les vecteurs O′M′, O″M″ étant parallèles et dans le rapport constant $\dfrac{k''}{k'}$, les deux figures F′, F″ sont homothétiques; leur rapport d'homothétie est $\dfrac{k''}{k'}$ et leur centre d'homothétie S est à l'intersection de M′M″ avec O′O″ : il est donc sur la droite O′O″, c'est-à-dire sur la droite S′S″.

D'ailleurs les trois rapports d'homothétie k', k'', $\dfrac{k''}{k'}$ sont évidemment ou tous trois positifs, ou deux négatifs et un positif. Donc les trois centres d'homothétie S, S′, S″ sont ou tous trois directs, ou deux inverses et un direct.

151. Cas particulier. — Si $k' = k''$, les vecteurs O′M′, O″M″ sont parallèles et de même sens ; donc M′M″ et O′O″ le sont aussi et on peut amener la figure F′ sur la figure F″ par une translation $\overline{O'O''}$. Par conséquent,

La figure homothétique d'une figure donnée ne fait que se déplacer parallèlement à elle-même, quand on change le centre d'homothétie en conservant le rapport d'homothétie.

152. Trois cercles considérés deux à deux ont trois centres d'homothétie directe et trois centres d'homothétie inverse. Les trois centres d'homothétie directe sont sur une même droite qu'on nomme *l'axe d'homothétie directe;* deux centres d'homothétie inverse et un centre d'homothétie directe sont sur une même droite qu'on nomme *axe d'homothétie inverse.* Il y a donc *un* axe d'homothétie directe et *trois* axes d'homothétie inverse.

EXERCICES

1. Si deux figures à centre sont directement homothétiques, elles sont aussi inversement homothétiques.

2. Inscrire un carré à un demi-cercle.

3. Inscrire à un cercle un triangle isoscèle, connaissant la somme de la base et de la hauteur. Discussion.

4. Etant données trois droites issues d'un même point, mener par un point donné une sécante telle que les segments interceptés par les trois droites sur cette sécante soient dans un rapport donné.

— On commencera par résoudre le problème en supposant le point donné sur l'une des trois droites.

5. Mener une parallèle à la base d'un triangle, telle que le segment intercepté sur cette parallèle par les deux autres côtés soit vu d'un point donné sous un angle droit.

6. Inscrire un carré à un triangle donné.

7. Inscrire à un triangle donné un triangle dont les côtés soient parallèles à trois droites données.

8. Par le point de contact A de deux cercles tangents extérieurement, on mène dans ces deux cercles deux cordes rectangulaires AB, AB'. Prouver que la droite BB' passe par un point fixe et trouver le lieu de la projection du point A sur cette droite.

9. Tracer un cercle passant par un point donné et tangent à deux droites données.

— On déterminera les points de contact en considérant le cercle cherché comme homothétique à n'importe quel cercle tangent aux deux droites.

10. Construire un triangle, connaissant : 1° un angle ; 2° le rapport de deux côtés ; 3° une hauteur, ou une médiane, ou une bissectrice, ou le périmètre, etc.

— On construira d'abord un triangle satisfaisant aux deux premières conditions, puis un triangle homothétique à celui-là et satisfaisant à la troisième condition.

11. Étant donné un triangle ABC, on prend sur BC deux points E et F symétriques par rapport au milieu de BC et on mène par ces deux points des parallèles à AB et AC, de manière à former un parallélogramme ayant pour diagonale EF. Prouver que l'autre diagonale passe par A.

12. Couper un triangle ABC par une sécante rencontrant les deux côtés AB, AC en des points D, E tels que AD = DE = EC.

— Les triangles ADE, DEC étant isoscèles, on connaît la direction de DE, par suite, celle de DC.

13. Trouver le lieu des points dont les distances à deux droites données soient dans un rapport donné. — Deux droites.

14. Trouver dans le plan d'un triangle un point dont les distances aux trois côtés soient proportionnelles à trois longueurs données.

CHAPITRE IV

FIGURES SEMBLABLES

153. On dit que deux figures F, F′ sont *semblables*, quand l'une d'elles est égale à une homothétique de l'autre, c'est-à-dire quand on peut placer ces deux figures de manière qu'elles soient homothétiques.

On appelle *homologues* les éléments de ces deux figures qui deviennent homologues quand les deux figures sont placées de manière à être homothétiques.

Quand nous nommerons deux polygones semblables, nous aurons soin d'énoncer les sommets homologues dans le même ordre ; ainsi, quand nous dirons que deux triangles ABC, A′B′C′ sont semblables, cela voudra dire qu'ils peuvent être placés de manière à être homothétiques, A′ étant l'homologue de A, B′ l'homologue de B et C′ celui de C.

Il est essentiel de remarquer que, dans deux triangles semblables, les côtés homologues sont opposés à des sommets homologues.

154. *Dans deux figures semblables,*

1° *Les angles homologues sont égaux* [149, II] ;

2° *Le rapport des longueurs de deux vecteurs homologues est constant* [149] et s'appelle *le rapport de similitude des deux figures ;*

3° *Deux triangles homologues*, c'est-à-dire ayant pour sommets des points homologues des deux figures, *sont semblables ;* car ils deviennent évidemment homothétiques en même temps que les deux figures.

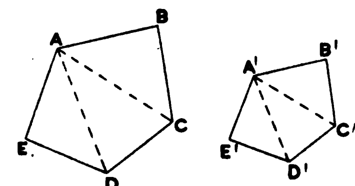


Fig. 146.

En particulier, étant donnés deux polygones semblables ABCDE, A'B'C'D'E' (fig. 146), si on décompose le premier polygone en triangles ABC, ACD, ADE d'une façon quelconque, ces triangles sont respectivement semblables aux triangles homologues A'B'C', A'C'D', A'D'E' qui composent le second polygone.

155. *Deux figures semblables à une troisième sont semblables entre elles* [150, II].

156. On dit que deux figures F, F', situées dans un même plan, sont *directement semblables* quand on peut les amener à être homothétiques *sans les faire sortir du plan*, *inversement semblables* quand, pour les amener à être homothétiques, *il faut retourner l'une d'elles.*

Soient A, B, C,... des points de F et A', B', C',... les points homologues de F'.

Si F et F' sont *directement* semblables, on peut amener l'angle BAC à coïncider avec B'A'C', sans le faire sortir du plan, de façon que AB s'applique sur A'B' et AC sur A'C'. Donc ces deux angles sont égaux et *de même sens.*

Si, au contraire, les figures F et F' sont inversement semblables, deux angles homologues BAC, B'A'C' sont égaux et *de sens contraires.*

157. **Théorème.** — *Étant donnés* (fig. 146) *deux polygones* ABCDE, A'B'C'D'E', *si les triangles* ABC, ACD, ADE *qui*

composent le premier polygone sont respectivement et directement semblables aux triangles A'B'C', A'C'D', A'D'E' *qui composent le second, les deux polygones sont directement semblables.*

En effet, supposons qu'on ait déplacé le second polygone dans le plan de manière que A'B' soit devenu parallèle à AB ; puis construisons la figure homothétique du premier polygone ABCDE, en prenant pour centre d'homothétie le point de rencontre S de AA' et de BB', et pour rapport d'homothétie $\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$ ou $\frac{\overline{SB'}}{\overline{SB}}$. A' sera l'homologue de A et B' celui de B ; soient C'', D'', E'', les homologues de C, D, E ; il s'agit de prouver que ces points C'', D'', E'' coïncident avec C', D', E'. En effet, les deux angles BAC, B'A'C'' étant homothétiques sont égaux et *de même sens* ; mais, par hypothèse, il en est de même des angles BAC, B'A'C'. Donc les deux droites A'C', A'C'' coïncident. Pour une raison analogue la droite B'C' coïncide avec la droite B'C'' ; donc C' coïncide avec C''. On prouve de même que D' coïncide avec D'', E' avec E''.

158. ***Théorème.*** — *Si un polygone* ABCDE *est formé de triangles* ABC, ACD, ADE *respectivement et inversement semblables aux triangles* A'B'C', A'C'D', A'D'E' *qui composent un autre polygone* A'B'C'D'E', *les deux polygones sont inversement semblables.*

Car, en retournant l'un d'eux, on est ramené au cas précédent.

CAS DE SIMILITUDE

159. La similitude de deux triangles ABC, A'B'C', implique cinq conditions :

$$A = A', \quad B = B', \quad C = C', \quad \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}.$$

Nous allons voir que deux de ces conditions convenablement choisies entraînent les trois autres.

[illegible] ABC, A′B′C′ (fig. 147)
[illegible] *mblables :*

[illegible] *Quand ils ont deux*
[illegible] *égaux chacun à cha-*

$$[illegible] \quad A = A', \quad B = B';$$

[illegible] *uand ils ont un angle*
[illegible] *nnels :*

$$[illegible] \frac{A'C'}{AC};$$

[illegible] *proportionnels :*

$$[illegible] \frac{A'C'}{AC}.$$

[illegible] AB″ égale à A′B′ et
[illegible] C, qui rencontre AC
[illegible] riangle AB″C″ est évi-
[illegible] e ABC par rapport au
[illegible] tant $\frac{AB''}{AB}$. Il suffit donc
[illegible] st égal à AB″C″.

[illegible] ABC, A′B′C′ aient deux
[illegible] A = A′, B = B′;
[illegible] B et B″ sont égaux, on
[illegible] angles A′B′C′, AB″C″
[illegible] al : AB″ = A′B′, adja-
[illegible] chacun.

[illegible] es ABC, A′B′C′ aient un

angle égal : $A = A'$, compris entre côtés proportionnels :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}.$$

Mais on a aussi [135]

$$\frac{AB''}{AB} = \frac{AC''}{AC}.$$

Comme $A'B' = AB''$, on en conclut que $\frac{A'C'}{AC} = \frac{AC''}{AC}$, d'où $A'C' = AC''$. Donc les triangles $A'B'C'$ et $AB''C''$ sont égaux, comme ayant un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun.

3° Supposons que les triangles ABC, $A'B'C'$ aient les trois côtés proportionnels :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}.$$

Mais on a aussi [135]

$$\frac{AB''}{AB} = \frac{AC''}{AC} = \frac{B''C''}{BC};$$

comme $A'B' = AB''$, on en conclut que

$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{AC''}{AC}, \quad \frac{B'C'}{BC} = \frac{B''C''}{BC};$$

d'où $A'C' = AC''$, $B'C' = B''C''$. Donc les triangles $A'B'C'$, $AB''C''$ sont égaux comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun.

160. Corollaires. — I. — *Deux triangles rectangles sont semblables quand ils ont un angle aigu égal* [1°].

II. — *Deux triangles isoscèles sont semblables quand ils ont même angle au sommet* [2°], *ou mêmes angles à la base* [1°].

[illegible] *bles quand ils ont les*
[illegible] *chacun à chacun ;*
[illegible] ns les deux cas, les
[illegible]. — Les côtés paral-
[illegible] logues.

[illegible] du cercle circonscrit,
[illegible] AB d'un triangle ABC
[illegible] iés de AH, BH, CH. — En
[illegible] ables comme ayant leurs
[illegible] de est $\frac{1}{2}$.

[illegible] entre le milieu de OH et
[illegible] pieds des hauteurs, par
[illegible] segments HA, HB, HC.
[illegible] *oints.*

[illegible] ocentre H, le centre de
[illegible] G, le centre O du cercle
[illegible] rit et le centre O_9 du cercle
[illegible] points forment une divi-
[illegible] monique.

[illegible] ables quand ils ont l'hy-
[illegible] rtionnels.

[illegible] ie deux cercles sous des
[illegible] r diamètre la droite qui
[illegible] rcles.

[illegible] né *abcd* un quadrilatère
[illegible] MNPQ.
[illegible] D, DA passent respective-
[illegible] es *b*B*c*, *d*D*a* étant égaux
[illegible] cercles circonscrits aux
[illegible] ints où la diagonale BD
[illegible] BD, ADB étant respecti-
[illegible] on connait les arcs *b*H,

[illegible] MNPQ, un quadrilatère
[illegible] *abcd.*
[illegible] uadrilatère *abcd* un qua-

drilatère ABCD semblable à MNPQ ; on obtient ainsi une figure semblable à la figure cherchée, etc.

7. Si, dans deux triangles ABC, A'B'C', les angles B, B' sont égaux et les angles C, C' supplémentaires, $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$.

Réciproquement, si $\widehat{B} = \widehat{B'}$ et $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$, les angles C et C sont égaux ou supplémentaires.

8. Deux polygones de n côtés sont semblables :

1° Quand ils ont les angles égaux chacun à chacun et $n-2$ côtés homologues proportionnels.

2° Quand ils ont $n-1$ côtés proportionnels comprenant $n-2$ angles homologues égaux chacun à chacun.

3° Quand ils ont les côtés proportionnels et $n-3$ angles homologues égaux chacun à chacun. -- On démontre aisément que les triangles obtenus en joignant les sommets des trois autres angles ont leurs côtés proportionnels.

9. On considère un triangle OAB de grandeur variable qui pivote autour du point O en restant directement semblable à un triangle donné. Démontrer que, si le point A décrit une ligne quelconque, le point B décrit une ligne semblable. En particulier, si le point A décrit une droite ou un cercle, il en est de même du point B.

10. Soient OX, OY deux droites concourantes ; A, un point fixe de la première, B, un point fixe de la seconde. On considère deux mobiles M et N qui se déplacent, l'un sur OX, l'autre sur OY, de façon que le rapport des segments $\overline{AM}$ et $\overline{BN}$ reste constant et on construit sur MN un triangle MNP directement semblable à un triangle donné :

1° Le second point de rencontre I des cercles circonscrits aux triangles OAB, OMN est fixe.

2° Les triangles IAB, IMN sont directement semblables. Donc MN est vu du point I sous un angle constant.

3° Le lieu du point P est une droite. En particulier, le lieu du milieu de MN, plus généralement, le lieu du point qui divise MN dans un rapport donné est une droite. Il en est de même du lieu de la projection de I sur MN.

4° Déterminer les points M et N de façon que la droite MN soit égale à une longueur donnée, ou parallèle à une droite donnée, ou passe par un point donné.

11. Construire un triangle semblable à un triangle donné ayant un sommet en un point donné et les deux autres sommets sur deux droites ou deux cercles donnés.

12. Construire un triangle équilatéral dont les sommets soient sur trois circonférences concentriques données.

ersection de deux cercles ;
ncontrant les deux cercles
riangle MNP directement
rer que, quand la sécante
N reste directement sem-
NP passent chacune par
un cercle. En particulier,
ment, le lieu du point qui
ercle.

à un triangle fixe reste
e donné, son orthocentre,
circonférences.

cles que l'on voit de deux
Un cercle.

is points donnés sous des

V

DU TRIANGLE, CERCLE, ETC.

triangle rectangle,
et de l'angle droit est
segments qu'elle déter-

est moyen proportion-
énuse et l'hypoténuse ;
t égal à la somme des

rectangle en A et AD
ngle droit.

... blables comme

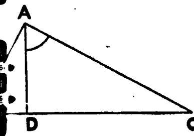


Fig. 149.

... ABC sont sem-
... hun ; donc

... BD. (2)

(3)

... es égalités (2) et

... $\overline{BC}^2$. (4)

... sont des égalités
... lieu entre les
... AB, AC... suppo-
... importe de re-
... soit la ligne prise

... *carrés des deux*
... *de leurs projec-*
... et (3), on déduit

... le rapport des

... le rapport de deux

... AB', AB''... (fig. 150),
... *nt* A *d'une circonfé-*
... *eux comme les pro-*
... *rdes sur le diamètre*
... ngles ABC, AB'C,...
... comme inscrits à une
... nce.

... *triangle, selon que*
... *aigu, le carré de ce*
... *des deux autres côtés*
... *'un de ces deux côtés*

... triangle et CD la hau-

$$\ldots D^2,$$

$$\ldots D^2;$$

$$\ldots \overline{AD}^2. \qquad (1)$$

... le pied D de la hau-
... t de BA au delà de A;

$$\ldots AB.AD.$$

... tte valeur et en sim-

$$\ldots 2\,AB.AD.$$

Si l'angle A est aigu (fig. 152), les points D et B sont du même côté de A ; donc

$$BD = AB - AD, \text{ ou } BD = AD - AB.$$

Dans les deux cas,

$$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 - 2AB.AD\,;$$

d'où, en portant dans (1) et simplifiant,

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2AB.AD.$$

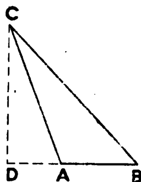


Fig. 151.

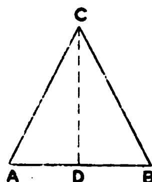


Fig. 152.

Si on ne fait pas d'hypothèse sur la nature de l'angle A, il faut se servir de la formule

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\,\overline{AB}.\overline{AD},$$

qui est vraie dans tous les cas. Car, si l'angle A est obtus (fig. 151) les vecteurs $\overline{AB}$ et $\overline{AD}$ sont de signes contraires, donc leur produit est négatif et égal à —AB.AD, et, si l'angle A est aigu (fig. 152), les vecteurs $\overline{AB}$ et $\overline{AD}$ sont de même signe, donc leur produit est positif et égal à + AB.AD.

COROLLAIRE. — *Un angle d'un triangle est aigu, droit ou obtus selon que le carré du côté opposé est inférieur, égal ou supérieur à la somme des carrés des deux autres côtés.*

... les trois côtés d'un ... les trois hauteurs et ... le circonscrit.

... a, b, c (fig. 153) les ... CA, AB, et par h_a la ... de A ; on a, dans le ... ADC,

... $\times$ CD,

$$\ldots - c^2)^2 \; .$$

$$\ldots)^2$$

$$\ldots (2ab - a^2 - b^2 + c^2)$$

$$\ldots a - b)^2]$$

$$\ldots c)(c + a - b)(c - a + b).$$

... du triangle :

$$\ldots p.$$

$$\ldots - c).$$

$$\ldots - b),$$

$$\ldots - a).$$

$$\ldots b)(p - c).$$

... s'en déduisent en rem-

[illegible] désignant par S

[illegible]

[illegible] te la surface du

[illegible]

[illegible] *s en multipliant*
[illegible] *correspondante*

[illegible] considérant les
[illegible] en menant les

[illegible] E × AC.

[illegible] circonscrit, nous

[illegible] *és d'un triangle*

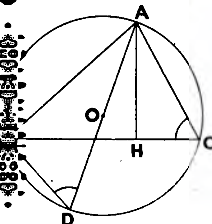


Fig. 154.

[illegible] ne mesure. Donc

[illegible] D. AH.

[illegible] AD, l'égalité précé-

[illegible] $\frac{2S}{a}$ trouvée ci-dessus,

[illegible] *des carrés de deux*
[illegible] ngle est égale à deux
[illegible] la moitié du troisième
[illegible] fois le carré de la
[illegible] pondant à ce côté;
[illegible] nce des carrés de deux
[illegible] iangle est égale au
[illegible] r la projection de la

[illegible] enons la médiane AD [illegible] les cas [162],

$$[illegible]\ \overline{DB}.\ \overline{DE}, \quad (1)$$
$$[illegible]\ \overline{DC}.\ \overline{DE}. \quad (2)$$

[illegible] 1) peut s'écrire

$$[illegible]\ \overline{DC}.\overline{DE}. \quad (3)$$

[illegible] es égalités (2) et (3),

$$[illegible]\ 2\overline{DC}^2. \quad (4)$$

[illegible] bre et en remarquant

$$[illegible]\ \overline{DE}. \quad (5)$$

… médiane AD par
… c, l'égalité (4)

… nction des trois

… triangle ABC,
… varie de telle
… médiane AD aura
… es :

… *somme des car-*
… *est égale à une*
… *ant pour centre*

… défini par l'éga-

… suffit de remar-
… sur la perpen-

… de BC une lon-
… férence sur BE
… iculaire au mi-

lieu I de BE, qui rencontre cette demi-circonférence en un point F tel que

$$\overline{BF}^2 = BI \times BE = \frac{k^2}{2}.$$

Puis, de B et de C comme centres, avec BF pour rayon, décrivons deux cercles, qui se coupent en deux points M et N, qui sont deux points du lieu. Enfin, menons MN, qui rencontre BC en son milieu D, et, de D comme centre, avec DM pour rayon, décrivons un cercle, qui est le lieu cherché.

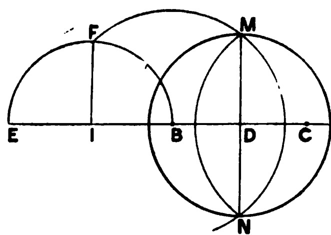


Fig. 156.

III. — L'égalité (5) montre que si, BC restant fixe, le point A varie de telle sorte que $\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2$ reste constant, $\overline{DE}$ sera aussi constant; donc le point E sera fixe. Par conséquent,

Le lieu géométrique des points, dont la différence des carrés des distances à deux points fixes B *et* C *est égale à une quantité donnée k^2, est une droite perpendiculaire à la droite qui joint les deux points fixes.*

Pour construire cette droite, il suffit de trouver sur BC un point E (fig. 157), tel que

$$\overline{EB}^2 - \overline{EC}^2 = k^2.$$

Prenons, sur la perpendiculaire à BC menée par C, une longueur CD $= k$; nous aurons aussi

$$\overline{ED}^2 - \overline{EC}^2 = k^2.$$

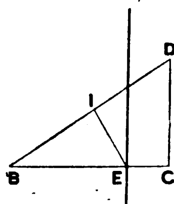


Fig. 157.

Donc il faut que EB = ED, c'est-à-dire que le point E

[illegible] éndiculaire au [illegible] uit, on mènera [illegible] i sera le lieu

[illegible] voir multiplié la [illegible] DB ; il vient

$$[illegible] \overline{DC} + \overline{DC}^2 . \overline{BD}$$

$$[illegible] \overline{DC}\,(\overline{BD} + \overline{DC}),$$

$$[illegible] \overline{DC}.\overline{BC}, \qquad (6)$$

$$[illegible] \overline{B}.\ \overline{BC} = 0. \qquad (7)$$

[illegible] s déjà rencontrée [illegible] nt A est en ligne [illegible] peut ramener le [illegible]

[illegible] r la droite BCD [illegible]

$$[illegible],$$

$$[illegible] B + \overline{ED}^2.\overline{BC}.$$

[illegible] de Stewart est [illegible] oite E, B, C, D, [illegible] B, C, D, quelle [illegible]

[illegible] bissectrice inté- [illegible]

$$[illegible] \qquad (8)$$

$$[illegible] \frac{\overline{BC}}{[illegible]B + AC};$$

d'où

$$\overline{BD} = \overline{BC} \cdot \frac{AB}{AB + AC}, \quad \overline{DC} = \overline{BC} \cdot \frac{AC}{AB + AC}. \qquad (9)$$

En substituant ces valeurs dans le *premier* membre de l'égalité (6), et divisant par $\overline{BC}$, cette égalité devient

$$\frac{\overline{AB}^2 . AC + \overline{AC}^2 . AB}{AB + AC} = \overline{AD}^2 + \overline{BD} . \overline{DC}.$$

Mais

$$\overline{AB}^2 . AC + \overline{AC}^2 . AB = AB . AC (AB + AC) ;$$

donc, en simplifiant, on a

$$AB . AC = \overline{AD}^2 + \overline{BD} . \overline{DC}. \qquad (10)$$

Donc *le produit de deux côtés d'un triangle est égal au carré de la bissectrice intérieure de leur angle, plus le produit des segments que cette bissectrice détermine sur le troisième côté.*

En remplaçant ensuite $\overline{BD}$ et $\overline{DC}$ par leurs valeurs (9) dans le second membre de (10), il vient, en désignant les côtés BC, CA, AB par a, b, c et la bissectrice AD par α,

$$bc = \alpha^2 + \frac{a\,bc}{(b + c)^2};$$

d'où on tire, en employant les notations du n° 163,

$$\alpha = \frac{1}{b + c} \sqrt{bc(a + b + c)(b + c - a)}$$

$$= \frac{2}{b + c} \sqrt{bcp(p - a)}. \qquad (11)$$

Si maintenant on suppose que AD est la bissectrice extérieure de l'angle A (fig. 158), on a [139]

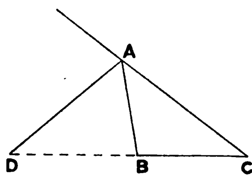


Fig. 158.

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = -\frac{AB}{AC},$$

égalité qui ne diffère de (8) que par le changement de AB en — AB ou de c en — c. Par conséquent, on a, au lieu des égalités (10)

(12

— a) ,

rieure.

gal à — DB. DC ;

al au produit des
bissectrice exté-

tère, la somme

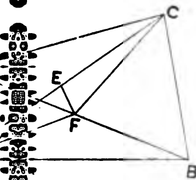


Fig. 159.

BCD. Menons
D, AFC, on a :

on a

$+ 4\overline{EF}^2$.

on a enfin

$$+ \overline{BD}^2 + 4\overline{EF}^2. \quad (13)$$

parallélogramme, la
carrés des côtés est
somme des carrés des
; car alors les diago-
pent en leurs milieux,
o.
oquement.

ABCD (fig. 160) la
ence des bases AB, CD

$$\overline{CD}^2 - 2AB.CD ;$$

$$^2 + 2\,AB.CD.$$

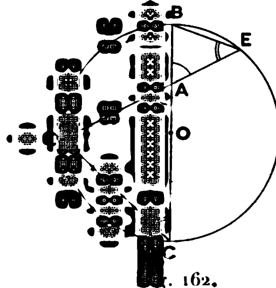
la somme des carrés
me des carrés des côtés
uit des bases.

PPORT A UN CERCLE
RE RADICAL

n point du plan d'un
e produit des vecteurs
deux points d'intersec-
conférence est constant.
PUISSANCE *du point par*
ression $d^2 - R^2$, *d dési-*

[illegible] *cercle et* R *le* [illegible]

[illegible] deux sécantes



[illegible] 162.

[illegible] une en B et C, [illegible] deux triangles [illegible] nt deux angles [illegible] A sont ou iden- [illegible] met (fig. 162) et [illegible] t même mesure.

[illegible] AE.

[illegible] $\overline{AE}$ ont même [illegible] deux positifs, ou [illegible] est extérieur ou [illegible]

[illegible] (1)

[illegible] quand la sécante [illegible] rouver la valeur [illegible] la sécante ABC [illegible]

[illegible] $= \overline{AO} - \overline{OB}$.

… appelons la *puissance*

… $\overline{OB}^2 = d^2 - R^2$.

… le ou négative, selon
… ieur à R, c'est-à-dire
… u cercle, situé sur la

… nt A est extérieur
… écante ABC devienne
… et C se confondent en
… nt $\overline{AB}^2$ et l'égalité (1)

… $\overline{AD} \times \overline{AE}$; (2)

… *arré de la tangente* AB
… *st égal au produit de*
… *D par sa partie exté-*

… eur est donc égale au
… oint.

… ectement l'égalité (2)
… BD, AEB sont encore
… gles égaux chacun à

… *A le point de concours*
… *de l'une,* D *et* E *deux*

… E,

… *e même circonférence.*

[illegible] trois points B, [illegible] el que [169]

[illegible] D [illegible] E

[illegible] n conclut que [illegible] E et E′ coïn- [illegible]

[illegible] *r droites,* B *un* [illegible] *utre* (fig. 163) ;

[illegible]

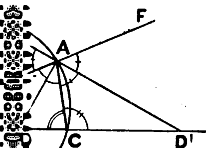
[illegible] *nts* B, D, E *est* [illegible]

[illegible] e la droite AB [illegible]

[illegible]

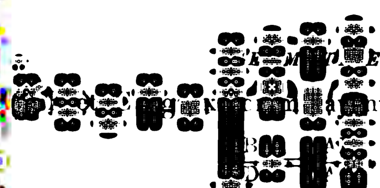
[illegible] n conclut que [illegible] dent.

[illegible] l'aide du théo- [illegible] relatifs aux bis- [illegible]



[illegible] 164.

[illegible] s égaux chacun [illegible] pothèse et les



t même mesure. Donc

$AD = \overline{AD}^2 + AD.DE.$

onc

BD.DC.

rice extérieure; E′ le
circonscrit. Les trian-
blables, pour la même



$- AD') AD'$

$D'^2 = D'B.D'C - \overline{AD'}^2.$

AUX

es points qui ont même
ercles O *et* O′ (fig. 165),
oite perpendiculaire à la
entres.



roite s'appelle l'*axe ra-*
deux cercles.
un point du lieu; en
par R et R′ les rayons
cercles, les puissances
cercles sont $\overline{MO}^2 - R^2$,

sont égales, on a

$\overline{MO}^2 - \overline{MO'}^2 = R^2 - R'^2.$

[illegible] les points tels [illegible] stances à deux [illegible] ntité constante [illegible] est une droite [illegible]

[illegible] x cercles a une [illegible] ercles, et, par [illegible]

[illegible] coupent est la [illegible] t l'axe radical [illegible] mmune.

[illegible] O, O′, O″ *de [illegible] les trois axes [illegible] ux à deux con- [illegible] centre radical [illegible]*

[illegible] O″, et celui des [illegible] a deux droites [illegible] un point C, qui [illegible]

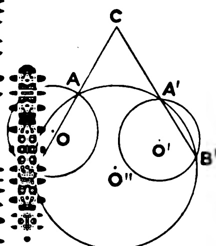


Fig. 166.

[illegible] ; on trace AB, [illegible] est un point de [illegible]

[illegible] t par le même pro-
[illegible] s par une ligne droite
[illegible]

[illegible] es O, O′, O″ sont en
[illegible] ux sont, en général,
[illegible] ux d'entre eux coïn-
[illegible] me puissance par rap-
[illegible] équent, appartiennent
[illegible] s ce cas, les trois axes
[illegible] arrive, par exemple,
[illegible] oints communs.

[illegible] QUADRILATÈRE
[illegible]

[illegible] *adrilatère convexe ins-*
[illegible] *s est égal à la somme*
[illegible] *des côtés opposés.*
[illegible] *uement.*

[illegible] 67) ABCD un quadri-
[illegible] quelconque. Menons,
[illegible] BAD, une droite AF
[illegible] D un angle égal à BAC ;
[illegible] sera aussi égal à CAD.
[illegible] AF une longueur AE

[illegible] espectivement sembla-
[illegible] omme ayant un angle

égal compris entre côtés proportionnels. Donc

$$\frac{AD}{AC} = \frac{DE}{BC}, \quad \text{ou} \quad AD.BC = AC.DE,$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CD}, \quad \text{ou} \quad AB.CD = AC.BE;$$

d'où

$$AD.BC + AB.CD = AC(BE + ED).$$

Or, en général, $BE + ED > BD$; donc *la somme des produits des côtés opposés est, en général, plus grande que le produit des diagonales.*

Il n'y a exception que si le point E est sur BD, et alors $BE + ED = BD$. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que les angles ADE, ADB soient égaux; or l'angle ADE est égal à ACB, en vertu de la similitude des triangles. Donc, pour que la somme des produits des côtés opposés soit égale au produit des diagonales, il faut et il suffit que le quadrilatère soit inscriptible.

Remarque. — Le théorème précédent peut s'énoncer en disant que, *dans tout quadrilatère croisé inscriptible* ABDC, *le produit des diagonales* AD, BC *est égal au produit des côtés croisés moins le produit des deux autres côtés ; et réciproquement.*

Si le quadrilatère ABCD n'est ni convexe, ni inscriptible, en construisant toujours un triangle ADE directement semblable à ACB, le point E sera hors de BD et on verra comme ci-dessus que la somme des produits des côtés opposés est plus grande que le produit des diagonales.

175. **Théorème.** — *Dans tout quadrilatère convexe ins-*

... est égal au rapport
... les produits des côtés
... aux extrémités de la
... nale à la somme des
... és qui aboutissent aux
... seconde. Et récipro-

... ABCD un quadri-
... inscrit à un cercle
... AE, CF des triangles

... (1)

... ; (2)

... (AE + CF).

... rencontre en H avec
... a AE + CF = AH ;

... R.AH. (3)

... R.BK, (4)

... abaissée de B sur la
...
... les égalités (3) et (4),

$$\ldots = \frac{AH}{BK}.$$

... K sont égaux, comme
... perpendiculaires ; donc

les triangles rectangles CAH, DBK sont semblables; d'où

$$\frac{AH}{BK} = \frac{AC}{BD}.$$

Donc enfin

$$\frac{AB.AD + BC.CD}{AB.BC + AD.CD} = \frac{AC}{BD}. \qquad (5)$$

CONSTRUCTIONS

176. Problème. — *Construire la moyenne géométrique de deux lignes données a, b.*

Première construction. — Prenons (fig. 169) sur une droite deux longueurs consécutives AB = *a*, BC = *b*; sur AC comme diamètre, décrivons une demi-circonférence; enfin, menons par B la perpendiculaire à AC, qui rencontre cette demi-circonférence en D : BD est la moyenne proportionnelle demandée [161], car le triangle ADC est rectangle en D.

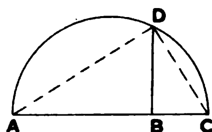


Fig. 169.

Op. $(4R_1 + 11C_1 + C_2 + 3R_2 + 6C_3)$.
Exactitude : 16. Simplicité : 25.

Deuxième construction. — Soit $a > b$. Prenons (fig. 170) sur une droite, à partir d'un point A et dans le même sens, des longueurs AB = *a*, AC = *b*; sur AB comme diamètre décrivons une demi-circonférence et menons par C la perpendiculaire à AB, qui rencontre cette demi-circonférence en D : AD est la moyenne proportionnelle demandée [161].

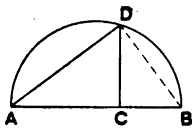


Fig. 170.

Op. $(4R_1 + 9C_1 + C_2 + 3R_2 + 5C_3)$.
Exactitude : 14. Simplicité : 22.

… cherchant à construire … $2a$ et $\frac{b}{2}$. Pour cela, … me centre (fig. 171), … cercle qui coupe cette … tre avec b pour rayon … C en D ; de D comme … crivons un cercle qui … ons EF, qui rencontre

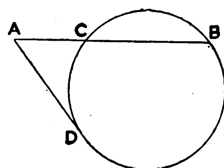


Fig. 172.

… st la moyenne propor- … t évidemment perpen- … n a

$$\ldots \frac{b}{2} = ab.$$

… $2R_2 + 3C_3$).

… : 14.

… prend sur une droite … t dans le même sens, … fait passer par B et C … par A on lui mène une … roportionnelle deman-

… $R_2 + 7C_3$).

… : 26.

177. *Construction d'expressions irrationnelles.* — Soit à construire la longueur x définie par l'équation

$$x = \sqrt{A},$$

A étant une expression rationnelle, homogène et du second degré formée avec des lettres a, b,... qui désignent des lignes données; par exemple,

$$A = \frac{a^5 + b^5}{c^3 - d^3}.$$

En désignant par λ une longueur arbitrairement choisie, nous savons [147] construire une ligne y telle que $\lambda y = A$; alors la longueur cherchée x est la moyenne proportiounelle entre λ et y.

Soit encore à construire

$$x = \sqrt[4]{B} = \sqrt{\sqrt{B}},$$

B étant une expression rationnelle, homogène et du *quatrième* degré. Ayant choisi une ligne arbitraire λ, nous pourrons construire une ligne y telle que $\lambda^3 y = A$; et alors

$$x = \sqrt{\sqrt{\lambda^3 y}} = \sqrt{\lambda\sqrt{\lambda y}}.$$

Nous construirons une ligne $z = \sqrt{\lambda y}$ moyenne proportionnelle entre λ et y, et la longueur cherchée x sera la moyenne proportionnelle entre λ et z.

Nous pourrons construire par ce procédé toutes les expressions irrationnelles homogènes et du premier degré, *pourvu qu'elles ne renferment pas d'autres radicaux que des racines carrées,* et, par suite, résoudre géométriquement, au moyen de la règle et du compas, tous les problèmes où l'inconnue est donnée par la résolution d'une ou plusieurs équations du second degré.

D'ailleurs, dans chaque cas particulier, il y a lieu de chercher une construction plus directe et plus simple que celle qui est fournie par la méthode générale ci-dessus. C'est ce que nous allons faire pour les questions suivantes.

[illegible] $=\sqrt{a^2+b^2}$.
[illegible] poténuse d'un triangle
[illegible] gle droit a et b.
[illegible] $\sqrt{a^2-b^2}$, on considère x
[illegible] droit d'un triangle rec-
[illegible] et b pour premier côté
[illegible]

[illegible]

$$[illegible]\ c^2\ldots,$$

[illegible] érie de triangles rectan-
[illegible] ent des lignes y, z,...

$$[illegible]\ y^2 \pm c^2,\ldots$$

[illegible] *deux droites dont la*
[illegible] *elle soient respectivement*
[illegible] *b.*

[illegible] x lignes répondant à la
[illegible] n ; leur somme AC doit
[illegible] gale à a, et, si sur AC
[illegible] diamètre on décrit une
[illegible] rconférence, qui ren-
[illegible] en D la perpendiculaire
[illegible] enée par B, BD sera égal
[illegible] yenne proportionnelle b.
[illegible] construction suivante :
[illegible] C égale à a élevez la
[illegible] cette perpendiculaire
[illegible] par F la parallèle à
[illegible] la circonférence décrite
[illegible] baissez DB et D'B' per-
[illegible] tes AB et BC, ou les

droites AB′ et B′C, répondent à la question. Mais AB′ = BC et B′C = AB. Donc il n'y a qu'*une solution*.

Pour que le problème soit possible, il faut que OF soit inférieur ou au plus égal au rayon de la circonférence, c'est-à-dire

$$b \leq \frac{a}{2};$$

si $b = \frac{a}{2}$, le point B se confond avec le point O et les lignes AB et BC sont égales.

D'ailleurs, on peut se dispenser de tracer la circonférence AC et les droites FD et DB en remarquant que FB = OD = $\frac{a}{2}$; donc on peut déterminer le point B par une circonférence décrite de F comme centre avec OA pour rayon. De cette manière, la construction a pour symbole

$$\text{Op.}(2R_1 + 8C_1 + C_2 + 2R_2 + 4C_3).$$

Exactitude : 11. Simplicité : 17.

180. Problème. — *Construire deux droites dont la différence et la moyenne proportionnelle soient respectivement égales à deux lignes données a et b.*

Soient AB, AC (fig. 174), deux lignes répondant à la question ; leur différence BC doit être égale à a, et, si sur BC comme diamètre on décrit une demi-circonférence, la tangente AD issue de A sera égale à la moyenne proportionnelle b. D'où la construction suivante :

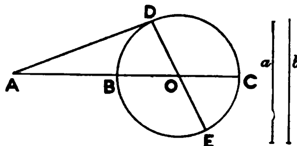


Fig. 174.

Sur une droite DE = a comme diamètre décrivez une demi-circonférence, portez sur la tangente en D une longueur DA = b et joignez le point A au centre O ;

... re de la droite AO
... sont les droites de-

... ossible et n'a qu'une

... *racines d'une équa-*

... mogène peut se ra-
... antes :

(1)
(2)
(3)
(4)

... s données et par x

... x et $a - x$ dont la
... proportionnelle à b:
... trouvées sera une
... soit possible il faut
... ines sont égales.

... x et $x + a$ dont la
... enne proportionnelle
... ouvées sera la valeur
... cine positive et une

Soit $x = -\alpha$ une racine négative de cette même équation. On aura

$$\alpha^2 - a\alpha - b^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \alpha(\alpha - a) = b^2;$$

donc on a encore à construire deux lignes α et $\alpha - a$ dont la différence soit égale à a et la moyenne proportionnelle à b; mais c'est la plus grande des deux lignes trouvées qui sera la valeur de α.

En résumé, si on construit deux lignes dont la différence soit a et la moyenne proportionnelle b, la plus petite représentera la racine positive et la plus grande la valeur absolue de la racine négative de l'équation (2). Le problème est toujours possible; autrement dit, l'équation (2) a toujours deux racines, une positive et une négative.

Les équations (3) et (4) ne diffèrent de (1) et de (2) que par le changement de x en $-x$; donc leurs racines sont respectivement égales à celles de (1) et de (2) changées de signe. D'ailleurs on peut appliquer directement à l'équation (4) la méthode suivie pour l'équation (2).

REMARQUE. — On ramène au second degré l'équation bicarrée

$$x^4 \pm a^2x^2 \pm b^4 = 0$$

en posant $x^2 = ay$. On peut construire y, qui est donné par l'équation

$$y^2 \pm ay \pm \frac{b^4}{a^2} = 0;$$

on en déduit x en construisant la moyenne proportionnelle entre a et y.

182. PROBLÈME. — *Partager une droite* AB (fig. 175)

en moyenne et extrême raison, c'est-à-dire trouver sur cette droite un point C *tel que*

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}.$$

Cette égalité peut s'écrire

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AB + AC}{AC + CB} = \frac{AB + AC}{AB},$$

ou

$$AC(AB + AC) = \overline{AB}^2 ;$$

et réciproquement, cette égalité entraîne la première.

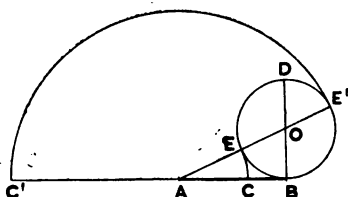


Fig. 175.

Donc on est ramené à construire deux lignes AC et AB + AC dont la différence et la moyenne proportionnelle soient égales à AB : la plus petite de ces deux lignes sera égale à AC.

On peut se demander si on ne pourrait pas trouver sur le prolongement de AB un point C′ répondant à la question, c'est-à-dire tel que

$$\frac{AB}{AC'} = \frac{AC'}{BC'}.$$

Le point C′ ne peut être à droite de B, car $\frac{AB}{AC'}$ serait moindre que l'unité et $\frac{AC'}{BC'}$ plus grand que l'unité ; il

faut donc chercher le point C′ à gauche de A. Mais alors l'égalité précédente peut s'écrire

$$\frac{AB}{AC'} = \frac{AC' - AB}{BC' - AC'} = \frac{AC' - AB}{AB},$$

ou

$$AC'(AC' - AB) = \overline{AB}^2.$$

Donc on est encore ramené à construire deux lignes AC′ et AC′ — AB dont la différence et la moyenne proportionnelle soient égales à AB ; mais c'est la plus grande de ces deux lignes qui sera égale à AC′.

D'où la construction suivante :

Au point B on élève BD perpendiculaire et égal à AB ; sur BD comme diamètre on décrit une circonférence et on joint le point A au centre O ; soient E et E′ les points de rencontre de la droite AO avec la circonférence : on a AE = AC, AE′ = AC′. Il ne reste plus qu'à rabattre AE et AE′ sur la droite AB et sur son prolongement, en AC et AC′.

Calcul de AC *et de* AC′. — Posons AB $= a$. On a successivement

$$AC = AE = AO - OE,$$
$$AC' = AE' = AO + OE';$$

$$\overline{AO}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{OB}^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2 \times 5}{4},$$

$$AO = \frac{a\sqrt{5}}{2},$$

D'où

$$AC = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1),$$

$$AC' = \frac{a\sqrt{5}}{2} + \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1).$$

On en déduit

$$BC = \frac{a}{2}(3 - \sqrt{5}),$$

$$BC' = \frac{a}{2}(3 + \sqrt{5}).$$

183. Autre construction. — Puisque AB est moyenne proportionnelle entre AC et AC' (fig. 176), la perpendiculaire à AB menée par A rencontre le cercle de diamètre CC' en un point E tel que AE = AB. D'autre part, puisque AC' — AC = AB, en appelant O le milieu de CC', on a

Fig. 176.

$$AB = (OC' + OA) - (OC - OA) = 2OA.$$

Donc OA est la moitié de AB. D'où la construction suivante :

Portez sur le prolongement de AB et perpendiculairement à AB deux longueurs AD et AE égales à AB ; du milieu O de AD comme centre, avec OE pour rayon, décrivez un cercle, qui rencontre AB en deux points C et C', qui sont les points demandés.

184. Problème. — *Tracer un cercle passant par deux points donnés* A *et* B (fig. 177) *et tangent à une droite donnée* CD.

Supposons le problème résolu, et soit F le point de contact d'un cercle tangent à la droite CD et passant par A et B. Prolongeons AB jusqu'à sa rencontre en E avec CD.

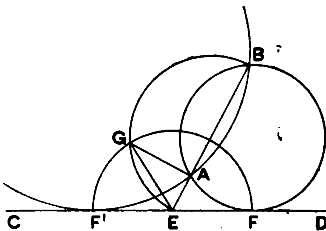


Fig. 177.

Nous savons que EF est moyenne proportionnelle entre EA et EB. On construira cette moyenne proportionnelle : soit EG ; on la rabattra de part et d'autre en EF ou en EF′, et il n'y aura plus qu'à faire passer un cercle par les trois points A, B, F ou A, B, F′.

Discussion. — Si les deux points A et B sont d'un même côté par rapport à CD, il y a deux solutions ; néanmoins, dans le cas où AB et CD sont parallèles, il n'y a plus qu'une solution, que l'on trouve immédiatement en remarquant que le point de contact est à l'intersection de CD avec la perpendiculaire élevée au milieu de AB. Si l'un des deux points A et B est sur la droite CD, il n'y a évidemment qu'une solution.

Enfin, le problème est impossible quand les points A et B sont de part et d'autre de CD.

185. Problème. — *Tracer un cercle passant par deux points donnés* A *et* B (fig. 178) *et tangent à un cercle donné* C.

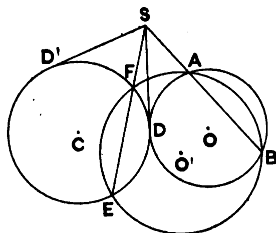


Fig. 178.

Supposons le problème résolu ; soit O le centre d'un cercle passant par A et B et tangent en D au cercle C, et soit S le point où la tangente commune en D rencontre AB. Par les deux points A et B faisons passer un cercle O′ qui coupe le cercle C en deux points E et F. Les axes radicaux des trois cercles C, O, O′ considérés deux à deux sont DS, AB, EF ; nous savons que ces trois axes radicaux concourent en un même point, donc EF passe par S. Par conséquent, le point S sera déterminé par

[illegible] F ; on mènera par ce
[illegible] C; le cercle passant
[illegible] A, B, D′ répondent
[illegible]

[illegible] lème soit possible, il
[illegible] nts A et B ne soient
[illegible] au cercle C. Si l'un
[illegible] le C, il n'y a qu'une
[illegible] us deux intérieurs ou
[illegible] ils sont d'un même
[illegible] r l'un des arcs sous-
[illegible] O′ ; donc le point S
[illegible] r conséquent, à l'ex-
[illegible] *ement de* EF ; donc le
[illegible] du cercle C, on peut
[illegible] tes au cercle C et le
[illegible]

[illegible] aient équidistants du
[illegible] mais, dans ce cas, on
[illegible] s D et D′ se trouvent
[illegible] C sur AB.

[illegible] E DEUX CERCLES
[illegible] CERCLES DONNÉS

[illegible] mothétie de deux cercles
[illegible] O, il y a deux couples
[illegible] s, A et B′, B et A′, tels
[illegible] arallèles, ainsi que les
[illegible] sont dits *antihomologues*,
[illegible] ue sécante issue de O il
[illegible] omologues. Si le point O

est extérieur aux deux cercles, les points de contact de chacune des tangentes issues de ce point sont à la fois homologues et antihomologues.

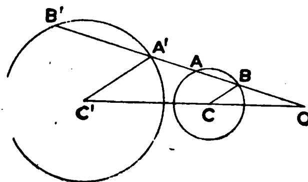


Fig. 179.

Théorème. — *Le produit des vecteurs qui joignent le centre d'homothétie à deux points antihomologues est constant.*

En effet, soient R et R' les rayons des deux cercles ; les rayons CB, C'A' qui aboutissent aux deux points homologues B et A' étant parallèles, on a

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OB}} = \varepsilon \frac{R'}{R},$$

en faisant $\varepsilon = +1$ ou $\varepsilon = -1$ selon que le point O est le centre d'homothétie directe ou inverse. D'autre part, en appelant p la puissance du point O par rapport au cercle C, on a

$$\overline{OA}.\overline{OB} = p.$$

D'où, en multipliant membre à membre et simplifiant,

$$\overline{OA}.\overline{OA'} = \varepsilon p \frac{R'}{R} = \text{constante}.$$

187. ***Lemme.*** — *Si par deux points antihomologues de deux cercles on mène un cercle tangent à l'un, il est aussi tangent à l'autre.*

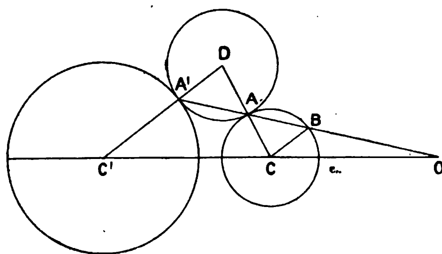


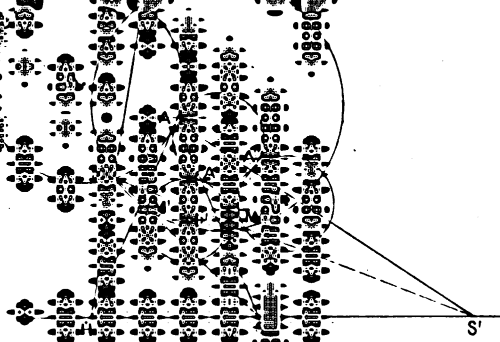
Fig. 180.

En effet, soient (fig. 180) A, A' deux points antihomologues de deux cercles C et C'; et soit D le centre d'un cercle passant par A et A' et tangent au cercle C. Le point de con-

[illegible] deux cercles C et D ;
[illegible] rencontre de la droite
[illegible] A′ sont deux points
[illegible]-à-dire que les rayons
[illegible] aussi parallèle à C′A′,
[illegible]ologues des cercles C
[illegible] sont en ligne droite ;
[illegible]ngent au cercle C′.

[illegible] *cercle tangent à trois*

[illegible] cercles donnés ; il y a
[illegible] trois cercles.



[illegible]les donnés de la même
[illegible]rieurement, ou tous les
[illegible]

[illegible] d'une façon et les deux
[illegible]

[illegible] d'une façon et les deux
[illegible]

[illegible] d'une façon et les deux
[illegible]

[illegible] *façon* aux trois cercles
[illegible]ons, pour fixer les idées,

qu'il soit tangent *extérieurement* à ces trois cercles. Les points de contact A et A' sont les centres d'homothétie inverse du cercle ω avec les cercles O et O'; donc la droite AA' passe par le centre S'' d'homothétie directe des cercles O et O' et les points A, A' sont des points antihomologues de ces deux cercles. De même, la droite AA'' passe par le centre S' d'homothétie directe des deux cercles O et O'', et les points A, A'' sont des points antihomologues de ces deux cercles. Prenons sur le cercle O un point arbitraire M; soit M' l'antimologue de M sur le cercle O', par rapport à S'', et soit M'' l'antihomologue de M sur le cercle O'', par rapport à S'; enfin, soit N le second point de rencontre du cercle O avec le cercle circonscrit au triangle MM'M''. Comme

$$\overline{S''A}.\overline{S''A'} = \overline{S''M}.\overline{S''M'},$$

le point S'' a même puissance par rapport aux cercles ω et MM'M''; il en est de même de S'; donc S'S'' est l'axe radical de ces deux cercles. Celui des cercles O et MM'M'' est MN; celui des cercles O et ω est la tangente commune en A; donc cette tangente commune passe par le point de rencontre H de S'S'' avec MN. Par conséquent, on aura le point A en menant par H une tangente au cercle O; on en déduira les points A', A'' en construisant les antihomologues de A sur les cercles O', O''.

Reste à prouver que le cercle, passant par les trois points A, A', A'' ainsi obtenus, répond à la question. En effet, S'S'' est l'axe radical des deux cercles AA'A'' et MM'M''; MH est celui des deux cercles MM'M'' et O; donc les deux cercles AA'A'' et O ont pour axe radical la tangente AH, et, par suite, sont tangents en A. Mais A et A' sont deux points antihomologues des deux cercles O et O'; donc (187) le cercle AA'A'', qui est tangent au cercle O, est aussi tangent au cercle O'. Pour une raison analogue, il est tangent au cercle O''.

Comme du point H on peut mener, en général, deux tangentes au cercle O, il y a, en général, deux cercles tangents *de la même façon* aux trois cercles donnés.

En remplaçant S' ou S'' par les centres d'homothétie inverse

is autres groupes de

éral, de deux cercles ;

M. Fouché (1) ; elle
un ou deux des cercles
onsidérant ces points

eux côtés sont entre eux
côté est rectangle ou

n carré dont un côté DE
DE est moyen propor-

ABC, on abaisse sur les
OA′, OB′, OC′ ; prouver

$\overline{AC'}^2 - \overline{BC'}^2 = 0;$

C′ situés sur les côtés
perpendiculaires menées
concourent en un même

es aux milieux des côtés,

ngle ABC, on a

$\overline{BG}^2 + \overline{CG}^2).$

n d'un triangle dont le

$\overline{A}^2 + \overline{GB}^2 + \overline{GC}^2.$

hauteurs BD et CE ; dé-

$.\overline{CD}.$

— En menant la troisième hauteur AF, on a $\overline{BA}.\overline{BE} = \overline{BF}.\overline{BC}$, etc.

7. Dans tout triangle rectangle, l'inverse du carré de la hauteur est égal à la somme des inverses des carrés des côtés de l'angle droit.

8. Soient a, a' les hypoténuses, h, h' les hauteurs, b et c, b' et c' les côtés de l'angle droit de deux triangles rectangles semblables ; on a

$$aa' = bb' + cc',$$

$$\frac{1}{hh'} = \frac{1}{bb'} + \frac{1}{cc'}. \quad \text{(G. Dostor)}$$

9. Dans un triangle ABC, on mène la hauteur AH et les bissectrices AD et AE de l'angle A et de son supplément ; si O est le milieu de BC, on a

$$OH.OD = \left(\frac{AB - AC}{2}\right)^2 \quad \text{et} \quad OH.OE = \left(\frac{AB + AC}{2}\right)^2.$$

— On prend sur AB une longueur AF = AC ; soit M le milieu de CF, la droite OM est tangente au cercle circonscrit au triangle MDH, etc.

10. Connaissant les quatre côtés d'un trapèze, calculer les diagonales. — On appliquera le théorème de Stewart.

11. Dans tout trapèze circonscrit à un cercle, le rayon du cercle est moyen proportionnel entre les segments déterminés par les points de contact sur chacun des côtés non parallèles.

12. Quand deux cercles sont tangents extérieurement, la portion de tangente commune extérieure comprise entre les points de contact est moyenne proportionnelle entre les diamètres.

13. Etant donnés un cercle O et un point P, trouver le lieu des points M tels que MP soit égal à la tangente menée au cercle O par le point M. — Ce lieu est l'axe radical du cercle O et d'un cercle de rayon nul ayant P pour centre.

14. On projette le sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle sur l'hypoténuse et on projette le point obtenu sur les côtés de l'angle droit. On obtient ainsi deux points D, E sur ces côtés, D sur AB, E sur AC. On pose BD = m, CE = n, prouver les relations suivantes :

$$\sqrt[3]{m^2} + \sqrt[3]{n^2} = \sqrt[3]{a^2},$$
$$3h^2 + m^2 + n^2 = a^2,$$
$$amn = h^3.$$

15. Si deux cercles déterminent sur une sécante des cordes

égales, le milieu de cette sécante est sur l'axe radical et la perpendiculaire à cette sécante en son milieu passe par le milieu de la distance des centres.

16. Etant donnés deux cercles et un point A, mener par ce point une sécante sur laquelle les deux cercles interceptent des cordes égales. Discussion.

17. Le lieu des centres des cercles qui coupent deux circonférences données en parties égales est une droite symétrique à l'axe radical par rapport au milieu de la distance des centres.

18. Tracer un cercle qui coupe trois circonférences données en parties égales.

19. Mener par deux points A et B un cercle interceptant sur un cercle donné un arc donné. — On déterminera le point où l'axe radical des deux cercles rencontre la droite AB.

20. Tracer un cercle tangent à un cercle donné O et tangent à une droite donnée en un point donné A.

— Sur la perpendiculaire à cette droite menée par A, on prendra une longueur AB égale au rayon du cercle O, et le centre du cercle demandé sera équidistant de B et de O.

21. D'un point M pris sur un cercle on abaisse MP et MQ perpendiculaires sur deux tangentes et MR perpendiculaire sur la corde des contacts. Prouver que $\overline{MR}^2 = MP \times MQ$.

22. Lieu des points dont la distance à la base d'un triangle isoscèle est moyenne proportionnelle entre les distances de ce point aux deux autres côtés.

23. Le produit des distances d'un point d'un cercle à deux côtés opposés d'un quadrilatère inscrit est égal au produit des distances de ce même point aux deux autres côtés.

24. Etant donnés un cercle et un point, si, par ce point on mène deux sécantes rectangulaires, la somme des carrés des quatre segments est égale au carré du diamètre.

25. Lieu des points dont les puissances par rapport à deux cercles sont égales et de signes contraires.

26. On joint un point C pris sur un diamètre AB d'un cercle à un point quelconque M de ce cercle ; puis on mène à la droite CM, par le point M, une perpendiculaire qui rencontre les tangentes en A et B aux points E et F. Prouver que l'angle ECF est droit et que le produit $AE \times BF$ est constant.

27. Construire un triangle connaissant un côté, l'angle opposé et sa bissectrice.

— Soient ABC le triangle demandé, AD la bissectrice et E le point où elle rencontre le cercle circonscrit. On a

$$ED \times EA = \overline{EB}^2 \quad \text{et} \quad EA - ED = AD\,;$$

donc on pourra construire les deux droites EA, ED, connaissant leur différence et leur moyenne proportionnelle.

28. Construire un triangle ABC, connaissant l'angle A, la hauteur correspondante et la somme ou la différence des côtés AB et AC.

— Si l'on prolonge AB d'une longueur AD = AC et qu'on appelle E le second point de rencontre de BC avec le cercle passant par A, C, D, dans le triangle BDE, on connaît le côté BD, l'angle opposé et la bissectrice EA.

29. Construire un triangle ABC, connaissant les deux côtés AB, AC et la longueur d'une droite AD partageant le côté BC dans un rapport donné.

— Si l'on mène par D la parallèle à AC, qui rencontre AB en E, il est aisé de voir que, dans le triangle ADE, on connaît les trois côtés.

30. Construire un triangle, connaissant deux côtés et la bissectrice de leur angle. — C'est un cas particulier du problème précédent.

31. Construire un triangle, connaissant un angle, un côté et la somme ou la différence des carrés des deux autres.

32. Construire un triangle rectangle dont l'hypoténuse soit égale à une longueur donnée a et tel que l'un des côtés de l'angle droit soit moyen proportionnel entre l'hypoténuse et l'autre côté. — Soit x cet autre côté, on a $x^2 = a(a - x)$, etc.

33. Construire un triangle rectangle connaissant la somme ou la différence des côtés de l'angle droit et le rapport de leurs carrés.

— On pourra commencer par construire un triangle semblable au triangle cherché.

34. Construire un trapèze, connaissant les deux côtés non parallèles, un angle et le produit des bases. — On commencera par construire la différence des bases.

LIERS

st *régulière* lorsque
tte ligne sont égaux
eux angles consécu-
conques sont situés
même région du plan
pport au côté com-
si (fig. 182) la ligne
BCDE est régulière ;
quoiqu'elle ait tous
parce que les angles
d'autre du côté com-

e ligne brisée régu-

uliers d'un nombre
osons (fig. 183) une
gales et joignons les
polygone ABCDEF
es côtés sont égaux
égaux, et tous ses
e mesure. Nous obte-
exe.
circonférence dans
ints de division de k

en k (fig. 184). Nous obtenons ainsi une ligne brisée régulière ABCD..., qui se fermera lorsque le nombre des divisions parcourues sera égal au plus petit multiple

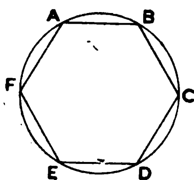


Fig. 183.

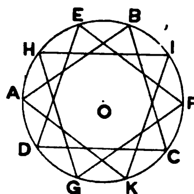


Fig. 184.

commun de n et de k ; mais on a vu en arithmétique [1] que ce plus petit multiple commun est $\frac{nk}{d}$, d étant le plus grand commun diviseur de n et de k. Ainsi, la ligne brisée ABCD... se fermera quand on aura parcouru $\frac{nk}{d}$ divisions, c'est-à-dire quand on aura tracé $\frac{n}{d}$ côtés, puisque chaque côté sous-tend k divisions ; on obtiendra donc un polygone régulier de $\frac{n}{d}$ côtés. Par conséquent, pour que le nombre des côtés de ce polygone soit précisément égal à n, il faut et il suffit que $d = 1$, c'est-à-dire que n et k soient premiers entre eux.

Reste à prouver que les polygones réguliers obtenus en partageant une circonférence en parties égales sont les seuls qui existent ; c'est ce qui résulte du théorème suivant.

191. **Théorème**. — *Etant donnée une ligne brisée régulière* ABCDE (fig. 185), *on peut lui inscrire et lui circonscrire une circonférence.*

---

[1] Voir *Manuel d'arithmétique* de L. Gérard, p. 39.

C faisons passer un
. Abaissons OH per-
ette perpendiculaire
lions la figure autour

r HC et le point B
, les angles B et C
ôté de BC, donc BA
omme BA = CD, le
point D; le point O
que OD = OA.
et de rayon OA pas-
même qu'elle passe

re autour du point O
AB viendra s'appli-
angle BCD ; comme
der avec le point D.

t des cordes égales
distance du centre;
entre, un cercle de
OH de ces cordes au
tous les côtés de la

[illegible] à un poly-
[illegible]

[illegible] *de k^e espèce*
[illegible] demi-cir-
[illegible] à k circon-
[illegible] cun de ces
[illegible]

[illegible]

[illegible] enir en par-
[illegible] arties égales
[illegible] k.
[illegible] olygone P est
[illegible] le polygone
[illegible] $\frac{n}{2}$ puisque,
[illegible]

[illegible]

[illegible] bres entiers
[illegible] il existe des
[illegible] ce. En effet,
[illegible] en n parties
[illegible] sion de k en
[illegible] de n côtés,
[illegible] n appelant α
[illegible] us-tendu par
[illegible]

[illegible] $\times k$.

d'espèces de polygones

s entiers premiers à n

mière espèce sont con-

lés.

rcles inscrit et circons-

u à un polygone régu-

igne brisée, ou de ce

igne brisée ouverte et

de côtés n'aient pas de

brisée régulière, ou

du cercle circonscrit ;

scrit ; *angle au centre,*

eux rayons aboutissant

ne régulier de *n* côtés

rtage une circonférence

angentes par les points

... (fig. 186), *on obtient*

ier circonscrit convexe

sommets sont les points

angentes en deux points

tifs.

es GAB, GBA, HBC, ...

ayant même mesure ;

sont isoscèles et égaux

comme ayant un côté égal, AB = BC = ..., adjacent à deux angles égaux chacun à chacun. Par conséquent, les angles G, H, K, ... sont égaux et tous les segments AG, BG, BH, ... sont égaux. Donc les côtés du polygone GHK..., qui se composent chacun de deux de ces segments, sont égaux et ce polygone est régulier.

Remarque. — Au lieu de mener les tangentes par les points de division, il revient au même de les mener par les milieux des arcs AB, BC,...; on obtient ainsi (fig. 187) un polygone circonscrit homothétique au polygone inscrit.

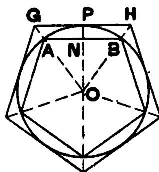


Fig. 187.

195. Problème. — *Connaissant le côté et le rayon d'un polygone régulier inscrit, calculer le côté du polygone régulier circonscrit d'un même nombre de côtés.*

Soient (fig. 187) $AB = a$, $OA = r$ le côté et le rayon du polygone inscrit; $GH = b$ le côté du polygone circonscrit. Abaissons ONP perpendiculaire sur AB et sur GH. On a

$$\frac{GH}{AB} = \frac{OG}{OA} = \frac{OP}{ON}, \text{ ou } \frac{b}{a} = \frac{r}{ON}.$$

Mais, dans le triangle rectangle ONA, on a

$$ON = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AN}^2} = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}.$$

Donc

$$b = \frac{ar}{\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}} = \frac{2ar}{\sqrt{4r^2 - a^2}}. \qquad (1)$$

Réciproquement, étant donnés b et r, on calcule a au moyen de la relation

$$\frac{AB}{GH}=\frac{OA}{OG}, \quad \text{ou} \quad \frac{a}{b}=\frac{r}{\sqrt{r^2+\frac{b^2}{4}}},$$

d'où

$$a=\frac{2br}{\sqrt{4r^2+b^2}}. \qquad (2)$$

D'ailleurs, on aurait pu trouver cette dernière formule en résolvant l'équation (1) par rapport à a.

196. **Théorème.** — *Deux polygones réguliers* ABC..., A'B'C'... (fig. 188) *de même espèce et d'un même nombre de côtés sont semblables et le rapport de leurs périmètres est égal au rapport de leurs rayons, ou de leurs apothèmes.*

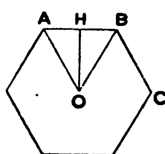


Fig. 188.

En effet, ces deux polygones ayant même angle au centre [193], si on les porte l'un sur l'autre de manière que le centre O et le rayon OA du premier s'appliquent sur le centre O' et le rayon O'A' du second, le point A tombera sur O'A', le point B sur O'B',... et comme $\frac{O'A'}{OA}=\frac{O'B'}{OB}=\ldots$, les deux polygones deviendront homothétiques; donc ils étaient semblables.

D'autre part, soient P et P' les périmètres de ces deux polygones, n le nombre de leurs côtés, OH et O'H' leurs apothèmes; on a, dans les triangles semblables OAB et O'A'B', OAH et O'A'H',

$$\frac{P'}{P}=\frac{n\,A'B'}{n\,AB}=\frac{A'B'}{AB}=\frac{O'A'}{OA}=\frac{O'H'}{OH}.$$

197. Problème. — *Inscrire un carré à un cercle.*

On mène (fig. 189) deux diamètres rectangulaires AC et BD, qui partagent la circonférence en quatre quadrants : ABCD est le carré demandé.

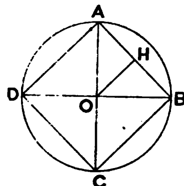


Fig. 189.

Soit r le rayon du cercle ; dans le triangle rectangle AOB, on a

$$AB = \sqrt{r^2 + r^2} = r\sqrt{2}.$$

L'apothème OH est la moitié du côté ; car, dans le triangle ABC, la droite OH, qui joint les milieux de deux côtés, est égale à la moitié du troisième côté BC.

198. Problème. — *Inscrire à un cercle un hexagone régulier et un triangle équilatéral.*

1° Soit AB (fig. 190) le côté de l'hexagone régulier inscrit au cercle (OA). L'angle au centre AOB vaut $\frac{360°}{6} = 60°$; donc la somme des angles à la base du triangle isoscèle AOB est égale à $180° - 60° = 120°$; donc chacun d'eux vaut 60° et, par suite, le triangle AOB est équilatéral.

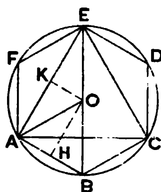


Fig. 190.

Donc le côté de l'hexagone régulier est égal au rayon et, pour construire cet hexagone, il suffit de tracer six cordes consécutives égales au rayon.

2° En joignant les sommets de l'hexagone de deux en deux, on obtient le triangle équilatéral ACE.

Pour calculer le côté AE de ce triangle, on considère le triangle rectangle AEB dans lequel

$$\overline{AE}^2 = \overline{BE}^2 - \overline{AB}^2 = 4r^2 - r^2 = 3r^2.$$

d'où

$$AE = r\sqrt{3}.$$

199. L'apothème OH de l'hexagone régulier est la moitié du côté du triangle équilatéral ; car cet apothème joint les milieux de deux côtés du triangle ABE. Donc

$$\mathrm{OH} = \frac{\mathrm{AE}}{2} = \frac{r\sqrt{3}}{2}.$$

De même, l'apothème OK du triangle équilatéral est la moitié du côté AB de l'hexagone, c'est-à-dire la moitié du rayon.

200. Quand deux cordes sont *supplémentaires*, c'est-à-dire sous-tendent des arcs supplémentaires, si l'une d'elles est le côté d'un polygone régulier, il en est de même de l'autre.

En effet, l'un des arcs étant la fraction $\frac{k}{n}$ de la circonférence, l'arc supplémentaire vaudra $\frac{1}{2} - \frac{k}{n}$, ou $\frac{n-2k}{2n}$ de la circonférence. Par exemple,

$$\text{si } \frac{k}{n} = \frac{3}{10}, \qquad \frac{1}{2} - \frac{k}{n} = \frac{1}{2} - \frac{3}{10} = \frac{1}{5}.$$

Dans ce cas, l'apothème de l'un des polygones est la moitié du côté de l'autre.

Ainsi, nous avons vu que l'apothème du triangle équilatéral est la moitié du côté de l'hexagone inscrit au même cercle, et inversement. De même, l'apothème du pentagone convexe est la moitié du côté du décagone étoilé, etc.

D'ailleurs, pour calculer directement l'apothème OH (fig. 190) d'un polygone régulier dont on connaît le côté $\mathrm{AB} = a$ et le rayon $\mathrm{OA} = r$, il suffit de remarquer que le triangle rectangle OAH donne

$$\overline{\mathrm{OH}}^2 = \overline{\mathrm{OA}}^2 - \overline{\mathrm{AH}}^2 = r^2 - \frac{a^2}{4}.$$

... *un décagone*

... 10 et infé-
... ux nombres
... 1 et 2. Donc
... réguliers et
... sous-tendent
... de la circon-
... obtenir ces
... irconférence
... de division
...
... nes (fig. 191);

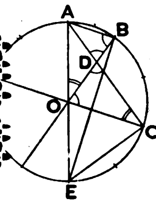


Fig. 191.

... = AD et

... $= r$.

... gaux, comme
... la circonfé-
... D, ACO sont

... ;

mais AD = AB ; donc

$$AC \times AB = \overline{AO}^2.$$

On est donc ramené à construire deux longueurs AB et AC dont la différence et la moyenne proportionnelle soient égales au rayon ; ce qui revient [182] à partager le rayon en moyenne et extrême raison. D'où la construction suivante :

Menez (fig. 192) deux rayons rectangulaires OA et OB ; du milieu C de OB comme centre, avec CA pour rayon, décrivez un cercle, qui coupe la droite OB en deux points F et G : OF et OG sont les deux longueurs cherchées. D'ailleurs on peut le vérifier en remarquant que leur moyenne proportionnelle est OA et que leur différence est OB.

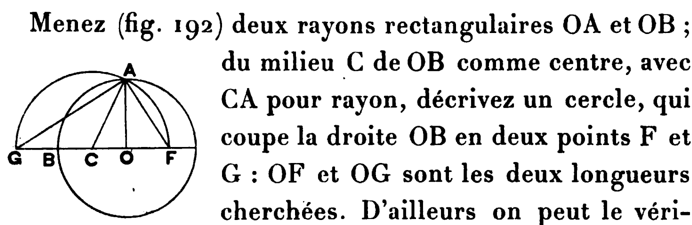


Fig. 192.

Pour calculer ces deux longueurs, il n'y a qu'à répéter le calcul déjà fait au n° 182; on trouve, pour le côté du décagone régulier convexe,

$$OF = CA - CO = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1),$$

et, pour le côté du décagone régulier étoilé,

$$OG = CA + CO = \frac{r}{2}(\sqrt{5} + 1).$$

2° La circonférence étant divisée en 10 parties égales, si l'on joint les points de division de 2 en 2, ou de 4 en 4 (fig. 191), on obtient le pentagone régulier convexe et le pentagone régulier étoilé. On calcule les côtés EC, EB de ces deux polygones dans les deux triangles rectangles AEC, AEB :

$$\overline{EC}^2 = \overline{AE}^2 - \overline{AC}^2, \qquad \overline{EB}^2 = \overline{AE}^2 - \overline{AB}^2;$$

[illegible] ar $\frac{r}{2}(\sqrt{5}+1)$,

[illegible]

[illegible] $\sqrt{10-2\sqrt{5}}$,

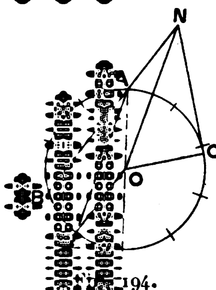
[illegible] $+2\sqrt{5}$.

[illegible]

[illegible] (fig. 192),

[illegible]

[illegible] ux pentagones [illegible] figure 192 ; ce [illegible] ctangles ayant



[illegible] 194.

[illegible] du cercle ; 2° le [illegible] lé.

[illegible] g. 193) AB le [illegible] t au cercle O ; [illegible] est le côté du [illegible] le parallélo- [illegible] e à AD ; puis

triangle rectangle
côté AD du penta-
reste à prouver que

rayon, est divisée
raison ; donc

$NC = AB.$

pour mot au déca-

rcle un pentédéca-

miers à 15 et infé-
n peut inscrire au
réguliers dont les
pectivement égaux

$$- \frac{1}{5},$$

$$- \frac{2}{5},$$

$$+ \frac{3}{10}.$$

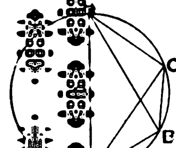
ire les quatre penté-

... par le côté de
... lu par le côté
... égal à $\frac{1}{15}$ de
... é du premier
... on a, dans le

... (1)

... -1).

... spectivement
... des BD et CD



... 96.

... équilatéral et

... $\sqrt{5}$.

... 3).

... par le côté du
... arc AC sous-
... xe, l'arc res-
... t la corde BC

sera le côté du deuxième pentédécagone. En menant le diamètre AD, on trouve comme ci-dessus,

$$BC = \frac{r}{4}\left(\sqrt{15} + \sqrt{3} - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\right).$$

3° Si du plus grand arc sous-tendu par le côté AB du triangle équilatéral (fig. 197) on retranche l'arc AC sous-tendu par le côté du pentagone étoilé, l'arc restant BC sera les $\frac{4}{15}$ de la circonférence et la corde BC sera le côté du troisième pentédécagone. Menons le diamètre AD; on a, dans le quadrilatère ACDB,

$$BC \times AD = AB \times CD + AC \times BD.$$

Mais

$$AD = 2r, \quad AB = r\sqrt{3}, \quad AC = \frac{r}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}},$$

$$BD = r, \qquad CD = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

D'où

$$BC = \frac{r}{4}\left(\sqrt{15} - \sqrt{3} + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\right).$$

4° Si à l'arc AB (fig. 198) sous-tendu par le côté de

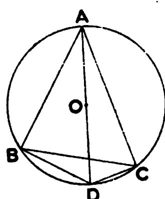


Fig. 197.

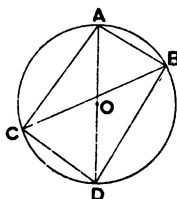


Fig. 198.

l'hexagone on ajoute l'arc AC sous-tendu par le côté du décagone étoilé, l'arc total BC est les $\frac{7}{15}$ de la circonférence et la corde BC est le côté du quatrième pentédé-

cagone; en le calculant comme le précédent, on trouve

$$BC = \frac{r}{4}\left(\sqrt{15} + \sqrt{3} + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\right).$$

203. Remarque. — Comme on peut diviser un arc en deux parties égales, on peut, d'après ce qui précède, inscrire à un cercle, au moyen de la règle et du compas, les polygones réguliers de

4, 8, 16, 32. . .	2^n côtés,
3, 6, 12, 24. . .	3×2^n côtés,
5, 10, 20, 40. . .	5×2^n côtés,
15, 30, 60, 120 . .	$3 \times 5 \times 2^n$ côtés.

204. Problème. — *Étant donnés le rayon r d'un cercle et le côté* AB $= a$ (fig. 199) *d'un polygone régulier inscrit, calculer le côté du polygone régulier inscrit d'un nombre double de côtés.*

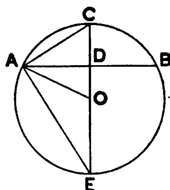


Fig. 199.

Menons le diamètre COE perpendiculaire à AB, qui passe par le milieu D de la corde AB et par le milieu C de l'arc AB; AC est le côté du polygone cherché. Appelons-le b; on a, dans le triangle acutangle OAC,

$$\overline{AC}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OC}^2 - 2\,OC \times OD,$$

ou

$$b^2 = 2r^2 - 2r \times OD.$$

Mais $OD = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}$, donc

$$b = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}}.$$

Réciproquement, connaissant b, on peut calculer a. En effet, les triangles rectangles DAC et AEC sont semblables; donc

$$\frac{AD}{AE} = \frac{AC}{EC};$$

d'où

$$AD \times EC = AC \times AE \quad \text{ou} \quad \frac{a}{2} 2r = b\sqrt{4r^2 - b^2},$$

$$a = \frac{b}{r}\sqrt{4r^2 - b^2}.$$

205. Problème. — *Connaissant les périmètres p et* P *de deux polygones réguliers de n côtés, l'un inscrit et l'autre circonscrit à un cercle, calculer les périmètres p′* et P′ *de deux polygones réguliers de 2n côtés, inscrit et circonscrit au même cercle.*

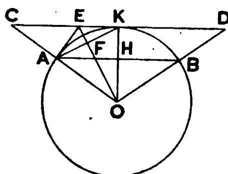


Fig. 200.

Soient (fig. 200) AB et CD les côtés des deux polygones donnés, de périmètres p et P; K le point de contact de CD; E le point de rencontre de CD avec la tangente en A; F celui de AK avec OE; H celui de OK avec AB. On a

$$p = 2n\,AH, \qquad P = 2n\,CK,$$
$$p' = 2n\,AK = 4n\,FK, \qquad P' = 4n\,EK.$$

La droite OE étant bissectrice dans le triangle COK, on a

$$\frac{EK}{EC} = \frac{OK}{OC} = \frac{OA}{OC} = \frac{p}{P};$$

d'où

$$\frac{p}{P+p} = \frac{EK}{EC+EK} = \frac{4nEK}{4nCK} = \frac{P'}{2P};$$

donc

$$P' = \frac{2Pp}{P+p}. \qquad (1)$$

Pour calculer p', remarquons que les triangles AHK, KFE sont semblables comme équiangles, donc

$$\frac{AH}{AK} = \frac{KF}{KE}, \quad \text{ou} \quad \frac{p}{p'} = \frac{p'}{P'};$$

d'où

$$p' = \sqrt{P'p}. \qquad (2)$$

206. Problème. — *Étant donnés le rayon r et l'apothème a d'un polygone régulier, calculer le rayon r' et l'apothème a' du polygone régulier* isopérimètre [1] *d'un nombre double de côtés.*

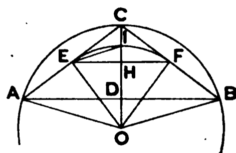


Fig. 201.

Soient (fig. 201) AB le côté du polygone donné, $OA = r$ et $OD = a$ son rayon et son apothème. La droite OD prolongée passe par le milieu C de l'arc AB; menons les cordes CA, CB et soient E, F leurs milieux. On a

$$EF = \frac{1}{2} AB, \quad \widehat{EOF} = \frac{1}{2} \widehat{AOB}.$$

Donc EF est le côté et l'angle EOF est l'angle au centre du polygone demandé; son rayon est OE et son apothème OH, en appelant H le point de rencontre de CO avec EF. Or ce point H est le milieu de CD, donc

$$OH = OD + \frac{OC - OD}{2} = \frac{OD + OC}{2},$$

ou

$$a' = \frac{a + r}{2}. \qquad (1)$$

Puis, dans le triangle rectangle OEC, $OE = \sqrt{OC \times OH}$; donc

$$r' = \sqrt{ra'}. \qquad (2)$$

---

[1] C'est-à-dire ayant même périmètre que le premier.

gure que OH > OD

de $r' - a'$, décri-
our rayon, un arc
I :

EH, puisque I est

$< IC$, ou $HI < \frac{1}{2} HC$,

à un cercle sont égaux,

de n côtés et d'espèce k
à pour mesure $\frac{4k}{n}$, en

scrit à un cercle est

est égal au diamètre.
t à un cercle de rayon r
n apothème à celui de

6. Calculer les côtés des pentagones et des décagones réguliers circonscrits à un cercle de rayon r.

7. Combien y a-t-il d'espèces d'octogones et de dodécagones réguliers ? Calculer leur côté et leur apothème en fonction du rayon.

8. Appliquer la formule du n° 204 au calcul du côté du pentagone régulier inscrit, en supposant connu le côté du décagone.

9. Les diagonales d'un pentagone régulier se partagent mutuellement en moyenne et extrême raison.

10. Les côtés d'un pentagone régulier étoilé déterminent, par leurs intersections mutuelles, un pentagone régulier convexe; calculer le côté de ce second pentagone en fonction de celui du premier. Même question pour le décagone.

11. Connaissant l'apothème et le côté d'un polygone régulier circonscrit à un cercle, calculer le côté du polygone régulier circonscrit au même cercle et d'un nombre double de côtés.

12. Quels sont les polygones réguliers qui, *employés seuls*, puissent servir à former un parquet ?

Il s'agit d'assembler autour d'un point y polygones réguliers convexes égaux de x côtés, de manière que la somme des angles formés autour de ce point soit égale à quatre droits :

$$y\left(2 - \frac{4}{x}\right) = 4, \quad \text{d'où } y = \frac{2x}{x-2} = 2 + \frac{4}{x-2}.$$

Or y doit être entier ; donc $x - 2$ doit être un diviseur de 4 ; donc $x = 3$, 4 ou 6 et alors $y = 6$, 4 ou 3 ; c'est-à-dire qu'il faudra assembler, autour d'un point, 6 triangles équilatéraux, 4 carrés ou 3 hexagones réguliers.

Mais, en prenant diverses sortes de polygones réguliers, il y a bien d'autres combinaisons : 1° des triangles équilatéraux avec des carrés, ou des hexagones, ou des dodécagones ; 2° des carrés avec des octogones, etc.

13. Un pentagone équilatéral est régulier s'il a trois angles égaux ; car la circonférence passant par les sommets de ces trois angles passe aussi par ceux des deux autres.

14. Connaissant les périmètres de deux polygones réguliers inscrits à un cercle, dont l'un a n côtés et l'autre $2n$, trouver le périmètre du polygone régulier de $4n$ côtés inscrit au même cercle.

15. Connaissant les rayons R et R′ de deux polygones réguliers isopérimètres de n et $2n$ côtés, trouver le rayon R″ du polygone régulier isopérimètre de $4n$ côtés.

16. Dans un polygone régulier de n côtés, la somme des carrés des distances d'un point quelconque aux n sommets est égale à n

fois la somme des carrés du rayon et de la distance du point considéré au centre.

17. Dans un hexagone régulier ABCDEF, les diagonales AC, BD, CE, DF, EA, FB forment en se coupant un second hexagone régulier. Calculer le rapport des côtés des deux hexagones.

18. Prouver que les côtés du premier et du troisième pentédécagone régulier sont égaux l'un à la différence et l'autre à la somme de l'apothème du décagone régulier convexe inscrit au même cercle et de la hauteur du triangle équilatéral construit sur le côté de ce décagone.

Théorèmes analogues pour les deux autres pentédécagones. Il suffit d'interpréter géométriquement les formules du n° 202.

19. Etant donné un cercle, construire sept hexagones réguliers tels que l'un d'eux ait même centre que le cercle et que chacun des autres ait un côté commun avec celui-là et deux sommets sur le cercle.

20. On construit, sur le diamètre AB d'une circonférence, un triangle équilatéral ABC ; on divise AB en n parties égales et l'on joint l'extrémité D de la deuxième division au point C. Soit E le point où le prolongement de CD coupe la circonférence. Démontrer que l'arc AE est la n^e partie de la circonférence, approximativement en général et rigoureusement pour $n = 3, 4, 6$.

CHAPITRE VII

LONGUEUR DE LA CIRCONFÉRENCE

208. Nous avons pu [14] comparer directement des arcs d'une même circonférence et en définir l'égalité et l'addition. Mais si l'on veut comparer des arcs de circonférences de rayons différents, ou un arc de cercle avec une portion de droite, comme la comparaison directe est impossible, il est nécessaire de ramener la longueur d'un arc de cercle à celle d'une ligne droite, et, pour cela, nous adopterons la définition suivante.

Définition. — *On appelle longueur d'un arc de cercle*

la limite [1] *vers laquelle tend la longueur d'une ligne brisée convexe inscrite à cet arc, lorsque tous les côtés de cette brisée tendent vers zéro suivant une loi quelconque, et que, par suite, leur nombre augmente indéfiniment.*

Pour justifier cette définition, il faut prouver que cette limite *existe* et qu'elle est *unique*, c'est-à-dire indépendante de la loi suivant laquelle les côtés de la brisée inscrite tendent vers zéro.

1° Soient (fig. 202) AB un arc de cercle et p_1 le périmètre d'une brisée convexe ACDB inscrite à cet arc. Joignons les sommets de cette brisée aux milieux des arcs AC, CD, DB, nous formons une seconde brisée inscrite

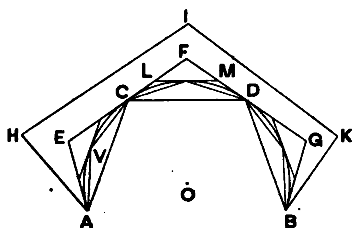


Fig. 202.

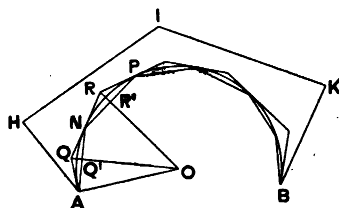


Fig. 203.

ayant deux fois plus de côtés et dont le périmètre p_2 est plus grand que celui de la première. En opérant de même sur cette nouvelle brisée, nous en aurons une troisième, et ainsi de suite. On obtient ainsi une suite de brisées inscrites dont les périmètres

$$p_1, \; p_2, \; p_3, \ldots, \; p_n,$$

vont en augmentant, tout en restant inférieurs au périmètre β d'une brisée *fixe* AHIKB enveloppant l'arc AB. Donc

(1) Pour les principes sur les limites, voir le *Cours d'algèbre* de M. Niewenglowski.

vers une limite λ.

correspondre une

t des tangentes par

ux brisées inscrites

circonscrites, dont

à chaque fois une

ligne droite LM.

stent supérieurs à p_1;

(fig. 203) ANP... B

circonscrite corres-

Soient Q′, R′,... les

.. avec AN, NP,...

$+ (NR - NR') + ...$

t semblables comme

on a

$$= \frac{OA - OQ'}{OQ'}.$$

AQ′ ou $\frac{1}{2}$ AN; donc,

nd côté de la brisée

ôtés de la brisée p_n

équilatéral inscrit;

thème de ce triangle

[illegible] la moitié du [illegible]

[illegible] a

[illegible] le périmètre [illegible]

[illegible] (1)

[illegible] tend vers zéro. [illegible] conséquent, la [illegible]

[illegible] de que le péri- [illegible] arc AB et plus [illegible] conscrite. [illegible] scrite convexe [illegible] e p, on peut [illegible] e périmètre q

ux sommets con-
U de l'arc AS.
inférieur ou égal

$q < P_n$;

nce $P_n - \lambda$ reste-
supérieure à $q-p$
tendre vers zéro,
nte indéfiniment.

circonscrite quel-
t toujours en trou-
tre Q soit moindre
point quelconque
re P au moins en
rieur ou égal à P,

constamment supé-
ndre vers zéro. Il

es assujetties à la
de q_n tendent vers
[1]. Je dis que q_n
niment.

t faire correspondre un
soient moindres que α.

En effet, soit Q_n la brisée circonscrite correspondant à q_n. On a (3°)

$$q_n < \lambda < Q_n .$$

Donc $\lambda - q_n$ est moindre que $Q_n - q_n$. Mais, en vertu de la formule (1), en supposant, ce qui est permis, tous les côtés de la brisée q_n moindres que le côté du triangle équilatéral inscrit, on a

$$Q_n - q_n < \frac{b_n}{r} \times \beta,$$

β étant une longueur *fixe,* et b_n désignant le plus grand côté de la brisée q_n. Mais, par hypothèse, b_n tend vers zéro lorsque n augmente indéfiniment; donc il en est de même de $Q_n - q_n$ et, *a fortiori,* de $\lambda - q_n$, c'est-à-dire que q_n a pour limite λ.

209. Tout ce que nous venons de dire s'applique à une circonférence entière aussi bien qu'à un arc de circonférence. Donc, en particulier,

1° *La longueur d'une circonférence est la limite commune vers laquelle tendent les périmètres des polygones réguliers convexes inscrits ou circonscrits, lorsque le nombre de leurs côtés augmente indéfiniment.*

2° *La longueur d'une circonférence est plus grande que le périmètre de tout polygone inscrit convexe et plus petite que le périmètre de tout polygone circonscrit.*

210. **Théorème.** — *Les longueurs de deux circonférences sont proportionnelles à leurs rayons.*

Soient C et C′ les longueurs de deux circonférences ; R et R′ leurs rayons; p_n et p'_n les périmètres de deux

[illegible] its à ces deux cir-
[illegible]

[illegible]

[illegible] p_n et p'_n ont pour
[illegible]

[illegible]

[illegible] ité précédente peut
[illegible]

[illegible]

[illegible] *circonférence à son* [illegible] st-à-dire un nombre [illegible] onférences. On dési- [illegible]

[illegible] R. (1)

[illegible] *nce s'obtient en mul-* [illegible] *nombre* π.

[illegible] on peut trouver des [illegible]

[illegible] degré d'une circonfé- [illegible] c la longueur l d'un [illegible] mule

[illegible] (2)

[illegible] *ercepte un arc égal*

au rayon, dans une circonférence quelconque, est indépendant du rayon de la circonférence.

En effet, soient R le rayon d'une circonférence, ω un angle au centre qui intercepte un arc égal à R. Comparons cet angle ω à un angle au centre droit D, qui intercepte un arc égal à $\frac{2\pi R}{4}$ ou $\frac{1}{2}\pi R$; en écrivant que ω et D sont entre eux comme les arcs qu'ils interceptent, on a

$$\frac{\omega}{D} = \frac{R}{\frac{1}{2}\pi R} = \frac{2}{\pi},$$

d'où

$$\omega = D \times \frac{2}{\pi}. \qquad (3)$$

Donc cet angle ω est *constant*, c'est-à-dire indépendant de R.

Pour l'évaluer en degrés, il suffit de remplacer, dans la formule précédente, D par 90° ; ce qui donne

$$\omega = 180^\circ \times \frac{1}{\pi}.$$

En remplaçant $\frac{1}{\pi}$ par la valeur 0,3183098..., que nous trouverons plus loin, on obtient

$$\omega = 57^\circ 17' 44'',80.$$

On arriverait au même résultat en faisant $l = R$ dans la formule (2).

IV. — *Dans deux circonférences, le rapport de deux arcs semblables*, c'est-à-dire correspondant à des angles au centre égaux, *est égal au rapport des rayons, et réciproquement.*

En effet, soit l la longueur d'un arc de circonférence

e correspondant.

ence, l'angle au

n écrivant que A

'ils interceptent,

(4)

de circonférence

e correspondant;

;

nombre qui mesure

désignant ce nombre

(5)

l'angle ω qui inter-

crite de son sommet

gale à celle de son

e l'angle au centre

le rapport constant

e circonférence quel-

et le rayon de cette

oit est $\dfrac{\frac{1}{2}\pi R}{R} = \dfrac{\pi}{2}$

$= \dfrac{\pi}{180}$.

213. **Changement d'unité.** — Soient a, a', a'' les nombres qui mesurent un même angle A, suivant qu'on prend pour unité l'angle ω dont l'arc est égal au rayon, ou l'angle droit D, ou l'angle d'un degré, que nous appellerons Δ. On a

$$a = \frac{A}{\omega}, \quad a' = \frac{A}{D}, \quad a'' = \frac{A}{\Delta}.$$

Connaissant l'un des trois nombres a, a', a'', il est aisé de calculer les deux autres. En effet,

$$\frac{A}{\omega} = \frac{A}{D} \times \frac{D}{\omega} = \frac{A}{\Delta} \times \frac{\Delta}{\omega}.$$

Or, $\frac{D}{\omega}$ et $\frac{\Delta}{\omega}$ sont les nombres qui mesurent D et Δ quand on prend ω pour unité, savoir $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{180}$. Donc

$$a = a' \times \frac{\pi}{2} = a'' \times \frac{\pi}{180}.$$

On en déduit la relation $a'' = 90\,a'$, qui résulte d'ailleurs de ce que l'angle droit vaut 90 degrés.

CALCUL DE π

214. Comme $\pi = \frac{C}{2R}$, pour calculer π, on peut se donner R et calculer des valeurs approchées de C : c'est la *méthode des périmètres* ; ou bien se donner C et calculer des valeurs approchées de R : c'est *la méthode des isopérimètres*.

MÉTHODE DES PÉRIMÈTRES

215. Faisons $R = \frac{1}{2}$ d'où $C = \pi$; il en résulte que les périmètres des polygones réguliers convexes inscrits au cercle de rayon $\frac{1}{2}$ sont des valeurs approchées de π *par défaut*, et que les périmètres des polygones réguliers

[illegible] valeurs approchées

[illegible] périmètres p_0 et P_0 [illegible] de n côtés, l'un [illegible] de rayon $\frac{1}{2}$; nous [illegible] p_1 et P_1 des poly- [illegible] et circonscrit, au [illegible]

$$[illegible] \; p_0 ; \qquad (1)$$

[illegible] ètres p_2 et P_2 des [illegible]; inscrit et circons- [illegible] ns ainsi deux séries [illegible]

[illegible]

[illegible] tres en décroissant, [illegible] c'est-à-dire π. [illegible]

[illegible] 419...

[illegible]

[illegible] à 0,001 près, *par* [illegible]

[illegible] ÈTRES

[illegible], c'est-à-dire que [illegible] de longueur égale [illegible] construit un poly- [illegible] t le périmètre soit

égal à 2, l'apothème a et le rayon r de ce polygone sont des valeurs approchées de $\frac{1}{\pi}$, par défaut et par excès.

En effet, le périmètre de ce polygone étant plus grand que la longueur $2\pi a$ de la circonférence inscrite et plus petit que la longueur $2\pi r$ de la circonférence circonscrite, on a

$$2\pi a < 2 < 2\pi r, \quad \text{d'où} \quad a < \frac{1}{\pi} < r.$$

De plus, il est aisé de voir que a et r sont des valeurs aussi approchées de $\frac{1}{\pi}$ qu'on voudra ; pour cela il suffit de montrer que, étant donné un nombre quelconque α, on peut prendre le nombre n des côtés du polygone assez grand pour que la différence $r - a$ soit moindre que α. En effet, dans le triangle OBC (fig. 205), qui a pour côtés le rayon, l'apothème et le demi-côté du polygone, on a

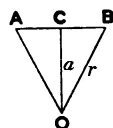


Fig. 205.

$$r - a < \mathrm{BC}.$$

Or, le périmètre du polygone étant égal à 2, chaque côté est égal à $\frac{2}{n}$, donc $\mathrm{BC} = \frac{1}{n}$. Par suite,

$$r - a < \frac{1}{n}.$$

Donc, pour que $r - a$ soit moindre que α, il suffit que

$$\frac{1}{n} < \alpha, \quad \text{ou} \quad n > \frac{1}{\alpha}.$$

217. Cela posé, calculons l'apothème a_0 et le rayon r_0 du carré de périmètre égal à 2 ; chaque côté du carré étant égal à $\frac{2}{4}$, on a

$$a_0 = \frac{1}{4}, \qquad r_0 = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Nous pourrons ensuite calculer l'apothème a_1 et le rayon r_1 de l'octogone régulier de périmètre 2, au moyen des formules [206] :

$$a_1 = \frac{a_0 + r_0}{2}, \quad r_1 = \sqrt{r_0 a_1}.$$

Nous calculerons de même l'apothème a_2 et le rayon r_2 du polygone régulier de 16 côtés dont le périmètre est encore égal à 2 ; et ainsi de suite en doublant à chaque fois le nombre des côtés. Nous obtiendrons ainsi deux séries de nombres

$$a_0,\ a_1,\ a_2, \ldots,\ a_k$$
$$r_0,\ r_1,\ r_2, \ldots,\ r_k,$$

qui iront, les uns en croissant, les autres en décroissant [207] et qui auront pour limite commune $\frac{1}{\pi}$.

Comme $a_k < \frac{1}{\pi} < r_k$, si l'on prend a_k ou r_k comme valeur approchée de $\frac{1}{\pi}$, l'erreur commise sera moindre que $r_k - a_k$.

Mais [207]

$$r_1 - a_1 < \frac{1}{4}(r_0 - a_0) ;$$

de même,

$$r_2 - a_2 < \frac{1}{4}(r_1 - a_1) < \frac{1}{4^2}(r_0 - a_0) ;$$

et, en général,

$$r_k - a_k < \frac{1}{4^k}(r_0 - a_0),$$

ce qui permettra de déterminer k de façon que $r_k - a_k$ soit moindre qu'une quantité quelconque donnée à l'avance.

D'ailleurs a_0 ou $\frac{1}{4}$ est la moyenne arithmétique entre o

et $\frac{1}{2}$, et r_0 ou $\frac{\sqrt{2}}{4}$ est la moyenne géométrique entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$; on arrive ainsi à ce théorème énoncé par le géomètre Schwabb (Nancy, 1813) :

Si on forme une suite de nombres

$$0, \frac{1}{2}, a_0, r_0, a_1, r_1, \ldots$$

commençant par 0 et $\frac{1}{2}$, et dont chacun, à partir du troisième, soit alternativement la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique entre les deux précédents, les nombres ainsi obtenus ont pour limite $\frac{1}{\pi}$.

En effectuant les calculs, on trouve

$$a_4 = 0{,}3180\ldots \quad r_4 = 0{,}3184\ldots$$

Donc,

$$0{,}318 < \frac{1}{\pi} < 0{,}3185$$

et 0,318 est une valeur approchée de $\frac{1}{\pi}$, à un demi-millième près, par défaut.

218. On a trouvé, par d'autres méthodes plus expéditives,

$$\pi = 3{,}14159\,26535\ldots$$
$$\frac{1}{\pi} = 0{,}31830\ 98861\ldots,$$

Quand on n'a pas besoin d'une grande approximation, on peut prendre pour π la valeur $\frac{22}{7} = 3{,}1428\ldots$, trouvée par Archimède.

Dans les applications ordinaires, on prend, pour π, la valeur 3,1416 approchée par excès à 0,00001 près, et pour $\frac{1}{\pi}$ la valeur 0,31831 approchée par excès à 0,0000012 près.

Adrien Métius, mathématicien hollandais du XVII[e] siècle,

[illegible] $\frac{355}{113}$, que l'on peut
[illegible] 355 et en le sépa-
[illegible]

[illegible] périmètres est, au fond,
[illegible] fet, les formules (1)
[illegible]

$$[illegible] = \sqrt{\frac{1}{p_0} \times \frac{1}{P_1}}.$$

[illegible]

$$[illegible] \frac{1}{p_2}, \ldots,$$

[illegible] tir du troisième, est
[illegible] et la moyenne géomé-
[illegible]
[illegible] mbres de cette suite
[illegible]

[illegible] périmètres des carrés
[illegible], on a

$$[illegible]$$

$$[illegible] \frac{\sqrt{2}}{4} = r_0;$$

[illegible]

[illegible] ce dont le rayon est de
[illegible]

$$[illegible]\ 4^m,084.$$

2. Quel est le rayon d'une circonférence dont la longueur est de $5^m,8$?

$$\text{Réponse : } R = \frac{5,8}{2} \times \frac{1}{\pi} = 2,9 \times 0,3183 = 0^m,923.$$

3. Trouver la longueur d'un arc de $25^\circ 12'$ dans un cercle de rayon égal à 6 mètres.

— Un arc d'une minute a pour longueur $\frac{2\pi \times 6}{360 \times 60}$; or, $25^\circ 12'$ valent $25 \times 60 + 12 = 1.512$ minutes ; donc la longueur de l'arc en question est

$$\frac{2\pi \times 6 \times 1512}{360 \times 60} = \frac{2\pi \times 42}{100} = 2^m,64.$$

4. Trouver le rayon du cercle dans lequel un arc de 50° a 4 mètres de longueur.

— La longueur d'un arc de 1° est $\frac{4}{50}$, donc celle de la circonférence est $\frac{4 \times 360}{50}$; par conséquent,

$$2\pi R = \frac{4 \times 360}{50}, \quad \text{d'où} \quad R = \frac{4 \times 36}{10} \times \frac{1}{\pi} = 4^m,58.$$

5. Aux deux extrémités d'un diamètre d'un cercle, on mène, dans le même sens, deux perpendiculaires, l'une égale au triple du rayon, l'autre égale au tiers du côté du triangle équilatéral inscrit ; la droite qui joint les extrémités de ces perpendiculaires est égale à la demi-circonférence à moins de $\frac{1}{10.000}$ du rayon, par défaut. (Construction de Kolkanski.)

6. Démontrer que π est la limite vers laquelle tend l'expression

$$2^n \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\ldots + \sqrt{2}}}}},$$

lorsque n augmente indéfiniment, n étant le nombre des radicaux superposés.

— On y arrive en calculant le périmètre du polygone régulier de 2^{n+1} côtés inscrit dans le cercle de rayon $\frac{1}{2}$.

art de

$\sqrt{2}$;

$\sqrt{2} = 2.$

série de points équi-

$AA_2 > \ldots.$

res sur AA_1 et sur AA_3

$A_3 - AA_2.$

ne régulier inscrit à un
le nombre des côtés.
ns passant par A_1, A_2, …
ne

…

nc régulier circonscrit
augmente.

ôtés inscrits à un même
st le polygone régulier

et soit α la n^e partie de
de P sous-tend un arc β
un arc γ plus petit que α.
es sous-tendant, l'un un
, on obtiendra un nou-

veau polygone inscrit P_1 et on démontrera aisément que son périmètre est plus grand que celui de P. On opérera de même sur P_1, et ainsi de suite. Au bout de $n - 1$ opérations au plus, on arrivera à un polygone régulier P_k, dont le périmètre sera plus grand que ceux des précédents, en particulier, plus grand que celui de P.

Un polygone inscrit de $n-p$ côtés peut être considéré comme un polygone de n côtés dont p sont nuls. Donc le polygone régulier inscrit de n côtés a un périmètre plus grand que tous les polygones inscrits de $n-p$ côtés, réguliers ou non.

9. De tous les polygones de n côtés *au plus* circonscrits à un même cercle, celui qui a le plus petit périmètre est le polygone régulier circonscrit de n côtés.

Démonstration analogue.

En déduire que le périmètre d'un polygone régulier circonscrit diminue à mesure que le nombre des côtés augmente.

10. Le périmètre d'un polygone régulier inscrit est plus voisin de la longueur de la circonférence que celui du polygone régulier circonscrit semblable.

— On s'appuiera sur la formule

$$P' = \frac{2Pp}{P+p}$$

du nº 205 et on démontrera que $P' < \frac{P+p}{2}$.

LIVRE IV

CHAPITRE PREMIER

MESURE DES AIRES

220. On appelle *aire* l'étendue d'une portion limitée de surface.

On dit qu'une portion de surface A est la *somme* de plusieurs autres portions de surfaces B, C, D, lorsque A est formée de parties respectivement superposables à B, C, D.

On dit qu'une portion de surface C est la *différence* entre deux portions de surfaces A et B lorsque A est la somme de B et de C.

On dit que les aires de deux portions de surfaces sont *égales*, ou que ces deux portions de surfaces sont *équivalentes*, quand on peut les considérer comme sommes ou comme différences de portions de surfaces superposables chacune à chacune.

Par conséquent, deux portions de surfaces peuvent être équivalentes, sans être superposables.

On peut répéter pour les aires tout ce que nous avons dit des segments de droites [7, 8]. En particulier, la *mesure* d'une aire, c'est le rapport de cette aire à une autre prise pour unité. Dans tout ce qui va suivre, nous prenons pour unité d'aire celle d'un carré ayant pour côté l'unité de longueur.

221. On appelle *dimensions* d'un rectangle ABCD (fig. 206) deux côtés consécutifs, AB et BC. L'un de ces deux côtés s'appelle la *base* et l'autre la *hauteur.*

222. **Théorème.** — *Le rapport de deux rectangles qui ont une dimension commune est égal au rapport des deux autres dimensions.*

Soient (fig. 206) deux rectangles ABCD, EFGH dans lesquels BC = EH. Supposons, par exemple,

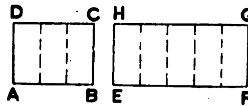


Fig. 206.

$$\frac{AB}{EF} = \frac{3}{5}.$$

Cela veut dire que, si l'on partage AB en 3 parties égales et EF en 5 parties égales, toutes ces parties sont égales entre elles. Menons par les points de division des parallèles aux côtés BC et EH; nous formons ainsi huit rectangles égaux, comme ayant leurs côtés égaux chacun à chacun. Il en résulte que le rapport des rectangles ABCD, EFGH est égal à $\frac{3}{5}$, par suite, égal à $\frac{AB}{EF}$.

Si le rapport $\frac{AB}{EF}$ est un nombre irrationnel, en imitant la démonstration du n° 95, on voit immédiatement que, quelle que soit la fraction $\frac{m}{n}$, les deux différences

$$AB - \frac{m}{n} EF$$

et

$$ABCD - \frac{m}{n} EFGH$$

sont de même signe.

Donc, dans tous les cas, les rapports $\frac{ABCD}{EFGH}$ et $\frac{AB}{EF}$ sont égaux.

précédent peut

entre eux comme

sont entre eux

x rectangles quel-
ts de leurs bases et

ases B et B′ et de
sième rectangle R″
, c'est-à-dire ayant
e R′. On aura donc,

e,

nd pour unité d'aire
ongueur, l'aire d'un
des nombres qui

H sa hauteur. Nous
Q qui a pour côté
e R est $\frac{R}{Q}$ et celles

... le théorème

... de H),

... *it de sa base*

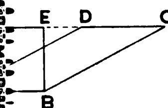
... rectangle dont

... *son côté.*

... d'un parallélo-
... *hauteur* la dis-

... *élogramme est*

... me ayant pour



...g. 207.

... et un côté de
... totale ABCF
... le parallélo-

… he le triangle BEC,
… parallélogramme est
… hite, a pour mesure
… dire le produit de
… eur.

… — *Deux parallé-*
… ABEF (fig. 208) *qui*
… *équivalents.*

… *angle est égale à la*
… *uteur.*

… BC un côté pris pour
… ; et soit D le point

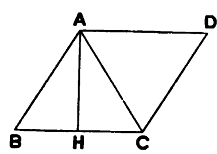


Fig. 209.

… c celle du triangle

… *s de même base et de*
… *x triangles de même*
… *uteurs et vice versa.*

… D'UN TRIANGLE

… s, h_a, h_b, h_c les hau-
… érimètre et S l'aire

… h_c. (1)

Or nous avons trouvé [163]

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

donc

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \qquad (2)$$

233. Des formules (1) on tire

$$a = \frac{2S}{h_a}, \qquad b = \frac{2S}{h_b}, \qquad c = \frac{2S}{h_c};$$

d'où

$$p = \frac{1}{2}(a+b+c) = S\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right) \qquad (3)$$

$$p-a = \frac{1}{2}(b+c-a) = S\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}\right) \qquad (4)$$

$$p-b = \frac{1}{2}(c+a-b) = S\left(\frac{1}{h_c}+\frac{1}{h_a}-\frac{1}{h_b}\right) \qquad (5)$$

$$p-c = \frac{1}{2}(a+b-c) = S\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right). \qquad (6)$$

En substituant dans (2) et en divisant par S^2, on a

$$\frac{1}{S} = \sqrt{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}\right)\left(\frac{1}{h_c}+\frac{1}{h_a}-\frac{1}{h_b}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)},$$

d'où l'on tire la valeur de S et, par suite, celles de a, b, c en fonction des trois hauteurs.

234. Soit R le rayon du cercle circonscrit. On a [164]

$$bc = 2Rh_a;$$

si l'on multiplie les deux membres par a, il vient, en remarquant que $ah_a = 2S$,

$$abc = 4RS, \quad \text{d'où} \quad S = \frac{abc}{4R}. \qquad (7)$$

du cercle inscrit
nt OA, OB, OC,
gle ABC en trois
A, OAB, dont les
ivement égales à
Donc on a, pour
ABC,

$$+ b + c) r,$$

$$pr. \qquad (8)$$

n du cercle exins-
O'B, O'C, on voit
mme des triangles
C. Or les aires de
nt égales à $\frac{1}{2} br_a$,

$$(9)$$

quations (8) et (9),

semblables, on en

et par suite

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c);$$

d'où

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

On trouverait de même

$$S = (p-b)\,r_b \quad (10)$$
$$S = (p-c)\,r_c. \quad (11)$$

237. Si l'on multiplie membre à membre les formules (8), (9), (10) et (11), on obtient

$$S^4 = p(p-a)(p-b)(p-c)\,r r_a r_b r_c = S^2\, r r_a r_b r_c,$$

ou

$$S = \sqrt{r r_a r_b r_c}. \quad (12$$

On peut exprimer r en fonction de r_a, r_b, r_c. En effet, des formules (9), (10), (11) et (8), on tire

$$\frac{S}{r_a} + \frac{S}{r_b} + \frac{S}{r_c} = p - a + p - b + p - c$$
$$= 3p - 2p = p = \frac{S}{r};$$

ou

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}; \quad (13)$$

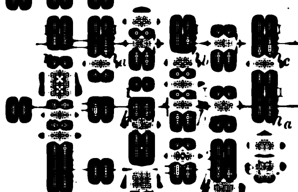
d'où on peut tirer r et, par suite, S en fonction de r_a, r_b, r_c.

238. Des formules (10) et (11), on tire

$$\frac{S}{r_b} + \frac{S}{r_c} = p - b + p - c = a.$$

Cette formule et les deux autres analogues permettent de calculer a, b, c en fonction de r_a, r_b, r_c.

(3), (9) et (4), (10) et



...pèze est égale au ...omme des bases, ou ...es côtés non paral-

...a diagonale BD le ...CD, ayant respec- ...bases les bases AB ...èze et pour hauteur ...istance DH de ces ...pelle la *hauteur du* ...aires de ces deux ...respectivement éga- ...DH et à $\frac{1}{2}$ CD×DH; ...pèze, on a

...H.

...s milieux des côtés ...me des bases, car ...et IF, qui sont res- ...D. Donc

...ormule en menant

par F la parallèle à AD, qui rencontre AB en G et CD en K ; les deux triangles FBG, FCK ainsi formés étant égaux, comme ayant un côté égal, FB = FC, adjacent à deux angles égaux chacun à chacun, l'aire du trapèze ABCD est égale à celle du parallélogramme AGKD et, par suite, a pour mesure EF × DH.

240. **Remarque.** — Pour évaluer l'aire du parallélogramme AGKD, on peut prendre pour base AD et pour hauteur la perpendiculaire FL abaissée de F sur AD. On obtient ainsi

$$S = AD \times FL.$$

Ainsi, *l'aire d'un trapèze est égale au produit d'un des côtés non parallèles par sa distance au milieu de l'autre côté.*

Aire d'un polygone quelconque

241. Nous entendons ici par *polygone* la portion de plan limitée par une ligne brisée fermée *dont les côtés ne se croisent pas.*

Pour évaluer l'aire d'un polygone, il suffit de le décomposer en triangles, d'évaluer les aires de ces triangles et d'en faire la somme.

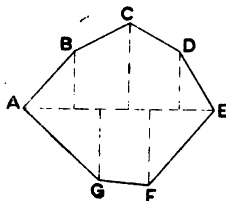


Fig. 212.

Pratiquement, étant donné un polygone ABCDEFG (fig. 212), on pourra mener la plus grande diagonale AE et projeter tous les sommets sur cette diagonale : le polygone se trouvera ainsi décomposé en triangles et en trapèzes rectangles, que l'on évaluera aisément.

242. **Problème.** — *Construire un triangle équivalent à un polygone donné* ABCDEF (fig. 213).

point B, menons la
rencontre en G le
longé. Le triangle
ivalent au triangle
ayant même base et
r. Le polygone pro-
équivalent au poly-
, qui a un côté de
érant de la même
a un nouveau poly-
eux côtés de moins.
triangle AGK équi-

arré équivalent à un

de trouver le côté x
le base b et de hau-

le entre $\frac{1}{2}b$ et h.
un parallélogramme,
olygone dont l'aire

ue, on commencera
uivalent et on appli-
récédente.

olygone régulier est

égale à la moitié du produit de son périmètre par son apothème.

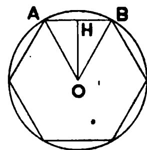


Fig. 214.

En effet, soient (fig. 214) AB un côté d'un polygone régulier de n côtés et OH son apothème. L'aire du triangle AOB est égale à $\frac{1}{2}$ AB $\times$ OH ; donc l'aire du polygone, qui se compose de n triangles égaux à AOB, est égale à $\frac{1}{2} n\text{AB} \times \text{OH}$, c'est-à-dire égale à la moitié du produit de son périmètre nAB par son apothème OH.

245. Définition. — On appelle *aire d'un cercle* la limite vers laquelle tend l'aire d'un polygone régulier inscrit à ce cercle, lorsque le nombre des côtés de ce polygone augmente indéfiniment. Nous allons prouver que cette limite existe et qu'elle est unique.

En effet, soient p le périmètre d'un polygone régulier inscrit à un cercle de rayon R et a son apothème. L'aire du polygone est égale à $\frac{1}{2} pa$. Or, si le nombre des côtés de ce polygone augmenteindéfiniment, p a, par définition, pour limite la longueur C de la circonférence et l'apothème a a pour la limite le rayon R. Donc l'aire du polygone a pour limite $\frac{1}{2}$ CR (1). C'est cette limite qu'on appelle l'aire du cercle.

Ainsi, l'aire du cercle est égale à celle d'un triangle qui aurait pour base la longueur C de la circonférence et

(1) On peut s'en rendre compte en écrivant

$$\text{CR} - pa = (\text{C} - p)\text{R} + p(\text{R} - a) < (\text{C} - p)\text{R} + \text{C}(\text{R} - a);$$

or, quand le nombre des côtés augmente indéfiniment, C — p tend vers zéro, par définition, et il en est de même de R — a, qui est moindre que la moitié du côté du polygone ; donc CR — pa tend aussi vers zéro.

pour hauteur le rayon R. En la désignant par S, et en remplaçant C par $2\pi R$, on a

$$S = \frac{1}{2} 2\pi R \times R = \pi R^2.$$

246. Secteur circulaire. — On appelle *secteur circulaire* la portion de plan comprise entre un arc de cercle et les deux rayons qui aboutissent à ses extrémités.

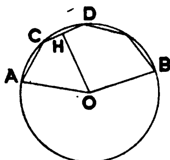


Fig. 215.

On appelle *aire d'un secteur circulaire* OAB (fig. 215) la limite vers laquelle tend l'aire d'un secteur polygonal OACD...B limité par les deux rayons OA, OB et par une brisée régulière inscrite à l'arc AB, lorsque le nombre des côtés de cette brisée augmente indéfiniment. Soient p le périmètre de cette brisée et a son apothème ; on démontre, comme ci-dessus [244], que l'aire du secteur polygonal est égale à $\frac{1}{2}pa$. Lorsque le nombre des côtés augmente indéfiniment, le périmètre p a pour limite la longueur l de l'arc AB, et l'apothème a a pour limite le rayon R ; donc l'aire du secteur polygonal a pour limite $\frac{1}{2}lR$: c'est cette limite qu'on appelle l'aire du secteur circulaire. En la désignant par S, on a

$$S = \frac{1}{2} lR.$$

Si l'arc AB contient n degrés, $l = \frac{2\pi R n}{360}$; donc

$$S = \frac{\pi R^2 n}{360}.$$

On peut d'ailleurs établir cette formule directement, en remarquant que l'aire d'un secteur est proportionnelle

à son angle au centre, ou au nombre de degrés contenus dans cet angle.

247. L'aire du *segment* ABC [99] est la différence entre celle du secteur OACB et celle du triangle OAB (fig. 216). Abaissons la hauteur BD, qui est la moitié de la corde BE qui sous-tend l'arc double de AB; l'aire du triangle OAB est égale à

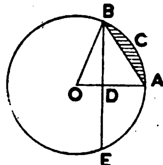


Fig. 216.

$$\frac{1}{2}\,\text{OA} \times \text{BD} = \frac{1}{4}\,\text{R} \times \text{BE}.$$

Donc l'aire du segment est égale à

$$\frac{1}{2}\,\text{arc AB} \times \text{R} - \frac{1}{4}\,\text{R} \times \text{BE}.$$

Si la corde BE est le côté d'un des polygones réguliers que nous avons étudiés, on pourra calculer, en fonction du rayon, la longueur de cette corde et, par suite, l'aire du segment. Sinon, il faut avoir recours à la trigonométrie.

En désignant par α l'angle AOB, on a BD $=$ R sin α.

EXERCICES

1. Démontrer que l'aire d'un triangle équilatéral de côté a est égale à $\frac{1}{4} a^2\sqrt{3}$. — En effet, la hauteur est égale à $\frac{1}{2} a\sqrt{3}$, etc.

2. L'aire du triangle [ex. 4, p. 49] ayant pour côtés les trois médianes d'un triangle donné est les trois quarts de l'aire de ce dernier. En déduire l'expression de l'aire d'un triangle en fonction des trois médianes.

3. Construire un triangle connaissant :

1° Deux hauteurs et le rayon du cercle inscrit [238];
2° Le périmètre, l'aire et un côté;
3° L'aire, un côté et le rayon du cercle circonscrit;
4° L'aire ou le périmètre et deux des quatre rayons des cercles inscrit et exinscrits [235, etc.];

[illegible] exinscrits ;

[illegible] point tel que les droites
[illegible] ent le triangle en trois

[illegible] er un quatrième point M
[illegible] A, MAB soient propor-

[illegible] e ABC une droite telle
[illegible] sur cette droite, l'aire
[illegible] rré donné. — L'aire de
[illegible] r sa distance au milieu

[illegible] e rectangle est égal au
[illegible]]. En déduire que l'aire
[illegible] t des segments détermi-
[illegible] t du cercle inscrit.

[illegible] côtés d'un triangle d'une
[illegible] qu'en M, N, P. Prouver
[illegible] gle proposé.

[illegible] connaissant l'aire et la
[illegible] triangle rectangle qui a
[illegible] des bases et la hauteur.
[illegible] pèze de hauteur donnée,

[illegible] èze dont on donne l'aire

[illegible] ir de côtés ne change
[illegible] décrivent des segments
[illegible] ue les sommets de rang

[illegible] s de rang impair restent
[illegible] s à un point quelconque,
[illegible] res. Il suffira de démon-
[illegible] latères.

[illegible] côtés qui ont les mêmes

[illegible] procédent ; on peut le
[illegible] les droites qui joignent
[illegible] consécutifs sont égales,

[illegible] L, A'B'C'...L' intérieurs
[illegible] , on prolonge les côtés
[illegible] contrent BC, CD,.., en

M, N, P... Si on les prolonge en sens contraire, ils rencontrent LA, AB,... en M′, N′, P′,... Prouver que les polygones MNP..., M′N′P′ ... sont équivalents.

14. Evaluer l'aire d'un trapèze en le considérant comme la différence de deux triangles.

15. Calculer l'aire d'un trapèze en fonction des quatre côtés. — En menant par une extrémité d'un des côtés non parallèles la parallèle à l'autre, on forme un triangle dont on connaît les côtés, qui sont respectivement égaux aux côtés non parallèles et à la différence des bases du trapèze. On calculera la hauteur de ce triangle, qui est la même que celle du trapèze, etc.

16. Trouver l'aire d'un quadrilatère ABCD, connaissant les côtés a, b, c, d et les diagonales m et n.

— En projetant le point A en E sur la parallèle à BD menée par C, on aura d'abord

$$2\,\overline{BD} \times \overline{CE} = a^2 - b^2 + c^2 - d^2.$$

Or l'aire du quadrilatère est $\frac{1}{2}$ BD $\times$ AE. On calcule AE dans le triangle rectangle ACE, en se servant de la relation précédente, etc. On trouve

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{(2mn + a^2 - b^2 + c^2 - d^2)(2mn - a^2 + b^2 - c^2 + d^2)}.$$

En déduire la formule qui donne l'aire d'un quadrilatère inscriptible en fonction des côtés.

Si le quadrilatère ABCD se déforme, les sommets B et C restant fixes et les côtés restant constants, et que l'on mène par C une droite faisant avec BD un angle constant ω et rencontrant AE en F, le triangle CEF reste semblable à lui-même ; donc BD$\times$CF reste constant. Il en résulte que le point F décrit un cercle.

En déduire la construction d'un quadrilatère connaissant les quatre côtés et l'angle des diagonales, ou leur produit, ou l'aire du quadrilatère.

17. D'un point O pris à l'intérieur d'un polygone équilatéral, on abaisse des perpendiculaires sur les côtés ; la somme de ces perpendiculaires est indépendante de la position du point O.

18. L'aire du triangle équilatéral inscrit à un cercle de rayon R est $\frac{3}{4}R^2\sqrt{3}$; celle du carré, $2R^2$; celle du pentagone régulier, $\frac{5}{8}R^2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$, etc.

19. Etant données les aires A et B de deux polygones réguliers de n côtés, l'un inscrit, l'autre circonscrit à un même cercle, cal-

culer les aires A′ et B′ des deux polygones réguliers inscrit et circonscrit de $2n$ côtés.

On trouve, en faisant la même construction qu'au nº 205,

$$A' = \sqrt{A \times B} \quad \text{et} \quad B' = \frac{2BA'}{A' + B}.$$

20. Connaissant les aires de deux polygones réguliers de n et de $2n$ côtés inscrits à un même cercle, trouver celle du polygone régulier inscrit de $4n$ côtés.

21. Si l'on prenait pour unité d'aire celle du triangle équilatéral dont le côté est égal à l'unité de longueur, ou celle du cercle de rayon égal à l'unité, quelle serait la mesure de l'aire d'un triangle quelconque, d'un carré, d'un cercle, etc. ?

22. Inscrire dans un triangle équilatéral trois cercles tangents entre eux et tangents chacun à deux côtés du triangle et évaluer l'aire comprise entre les trois cercles.

23. Etant donné un quadrant OAB, sur les rayons OA, OB comme diamètres on décrit deux demi-cercles, qui se coupent en un point C et qui partagent le quadrant en quatre parties ; évaluer les aires de ces quatre parties et démontrer que le point C est sur la droite AB.

24. Une couronne circulaire (différence de deux cercles concentriques) est équivalente au cercle qui a pour diamètre une corde du grand cercle tangente au petit.

25. Tous les polygones convexes isopérimètres circonscrits à un même cercle sont équivalents.

CHAPITRE II

COMPARAISON DES AIRES

248. **Théorème.** — *Deux triangles qui ont un angle égal ou supplémentaire sont entre eux comme les produits des côtés qui comprennent cet angle ; et réciproquement.*

Soient ABC, ADE, deux triangles ayant l'angle A commun (fig. 217) ou les angles en A supplémentaires (fig. 218).

Traçons la droite CD ; les deux triangles ABC, ADC

ayant même hauteur sont entre eux comme leurs bases AB, AD :

$$\frac{ABC}{ADC} = \frac{AB}{AD}.$$

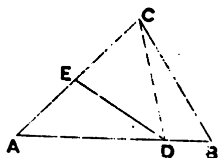


Fig. 217.

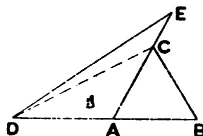


Fig. 218.

De même, les triangles ACD, AED sont entre eux comme leurs bases AC, AE :

$$\frac{ADC}{AED} = \frac{AC}{AE}.$$

En multipliant membre à membre, il vient

$$\frac{ABC}{ADE} = \frac{AB \times AC}{AD \times AE}.$$

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer la réciproque.

249. Corollaire. — *Deux triangles qui ont un angle égal ou supplémentaire, sont équivalents si les produits des côtés qui comprennent cet angle sont égaux dans les deux triangles.*

250. **Théorème.** — *Le rapport des aires de deux polygones semblables est égal au carré du rapport de deux côtés homologues.*

Considérons d'abord deux triangles semblables ABC, A'B'C' (fig. 219). Les angles B et B' étant égaux, on a, en vertu du théorème précédent,

$$\frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{BC}{B'C'} \times \frac{BA}{B'A'}.$$

Or $\frac{BA}{B'A'} = \frac{BC}{B'C'}$, puisque les triangles sont semblables. Donc

$$\frac{ABC}{A'B'C'} = \left(\frac{BC}{B'C'}\right)^2.$$

Démonstration directe. — Abaissons les hauteurs homologues AH, A'H'; on a

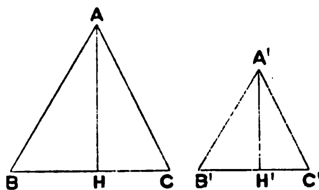


Fig. 219.

$$ABC = \frac{1}{2} BC \times AH \quad \text{et} \quad A'B'C' = \frac{1}{2} B'C' \times A'H';$$

d'où

$$\frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{BC}{B'C'} \times \frac{AH}{A'H'}.$$

Il suffit donc de prouver que $\frac{AH}{A'H'} = \frac{BC}{B'C'}$. En effet, les triangles rectangles ABH, A'B'H' sont semblables, parce que les angles B et B' sont égaux; par conséquent

$$\frac{AH}{A'H'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

Mais $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$, en vertu de la similitude des triangles ABC, A'B'C'; donc

$$\frac{AH}{A'H'} = \frac{BC}{B'C'}. \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Considérons maintenant deux polygones semblables P et P'. Nous savons [154,3°] que, si on décompose le poly-

gone P en triangles T_1, T_2, T_3,..., d'une façon quelconque, on pourra décomposer le polygone P' en triangles T'_1, T'_2, T'_3,... respectivement semblables aux précédents. Or, en désignant par a et a' deux côtés homologues des polygones P et P', nous venons de voir que

$$\frac{T_1}{T'_1} = \frac{T_2}{T'_2} = \frac{T_3}{T'_3} = \dots = \frac{a^2}{a'^2};$$

par conséquent,

$$\frac{T_1 + T_2 + T_3 + \dots}{T'_1 + T'_2 + T'_3 + \dots} = \frac{a^2}{a'^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{P}{P'} = \frac{a^2}{a'^2}.$$

RELATION ENTRE LES CARRÉS CONSTRUITS SUR LES TROIS CÔTÉS D'UN TRIANGLE

251. Lemme. — *Si, dans un triangle* ABC (fig. 220), *on mène deux hauteurs* AD *et* BE, *le rectangle qui a pour dimensions* CB *et* CD *est équivalent au rectangle qui a pour dimensions* CA *et* CE.

Cela résulte de l'égalité

$$CB \times CD = CA \times CE,$$

qu'on obtient en considérant les triangles semblables CDA et CEB.

Mais nous voulons démontrer directement que les rectangles CDFG, CEHK qui ont pour bases CD, CE et pour hauteurs CG = CB, CK = CA sont équivalents. En effet, menons par G la parallèle à CA, qui rencontre AF en L ; puis par K la parallèle à CB, qui rencontre BH en N. Les rectangles CDFG, CEHK sont respectivement équivalents aux parallélo-

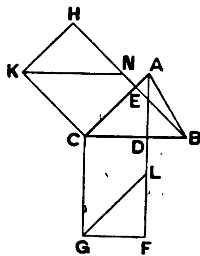


Fig. 220.

grammes CGLA, CBNK, comme ayant même base et même hauteur que ces parallélogrammes. Or ces parallélogrammes sont égaux, car on peut les faire coïncider en faisant tourner l'un d'eux de 90° autour du point C ; donc les deux rectangles sont équivalents.

252. ***Théorème de Pythagore.*** — *Dans tout triangle rectangle* ABC (fig. 221), *le carré construit sur l'hypoténuse* BC *est égal à la somme des carrés construits sur les deux autres côtés* AB *et* AC.

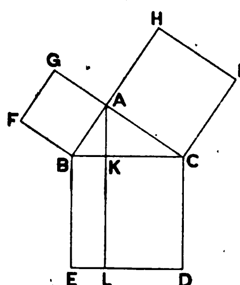


Fig. 221.

Ce théorème résulte de la relation

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2.$$

Pour le démontrer directement, il suffit de mener par le sommet de l'angle droit la perpendiculaire AKL sur l'hypoténuse BC : on partage ainsi le carré construit sur l'hypoténuse en deux rectangles BL, CL respectivement équivalents aux carrés construits sur AB et sur AC, en vertu du lemme précédent.

Corollaire. — Les rectangles BL, CL et le carré BCDE sont entre eux comme leurs bases BK, CK, BC ; donc *les carrés construits sur les côtés de l'angle droit et sur l'hypoténuse sont proportionnels aux projections des côtés de l'angle droit sur l'hypoténuse et à l'hypoténuse.*

253. Remarque. — On peut démontrer le théorème de Pythagore de la façon suivante :

Soit (fig. 222) ABC le triangle rectangle donné, construisons le carré BCDE ; puis faisons tourner le triangle

ABC de 90° de manière à l'amener en CDK ; enfin transportons ABC en IED et CDK en BEF. Alors il est visible que si l'on enlève du carré BCDE les triangles ABC et BEF pour les remplacer par IED et CDK, on obtiendra la figure ACKIEFA, équivalente au carré donné et composée de deux carrés, qni sont précisément les carrés construits sur les côtés de l'angle droit de ABC.

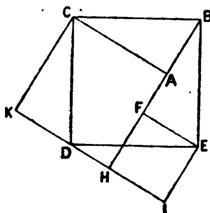


Fig. 222.

254. ***Théorème.*** — *Dans tout triangle obtusangle, le carré construit sur le côté opposé à l'angle obtus est équivalent à la somme des carrés construits sur les deux autres côtés augmentée de deux fois le rectangle ayant pour base l'un de ces deux autres côtés et pour hauteur la projection de l'autre sur celui-là.*

Soit (fig. 223) ABC un triangle, dans lequel l'angle A est obtus et soit AF la projection de AC sur AB. Nous savons que

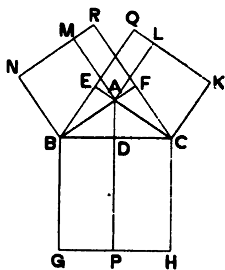


Fig. 223.

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2AB \times AF,$$

ce qui démontre le théorème.

Pour le démontrer directement, construisons les trois carrés sur BC, CA, AB et menons les trois hauteurs AD, BE, CF, qui rencontrent GH, KL, MN, en P, Q, R. D'après le lemme ci-dessus, les rectangles BP, CP sont respectivement équivalents aux rectangles BR, CQ. Donc le carré construit sur BC équivaut à la somme des deux rectangles BR, CQ, c'est-à-dire à la somme des carrés BM,

CL construits sur AB et sur AC, augmentée de la somme des deux rectangles AQ et AR, qui sont équivalents en vertu du lemme : ce qui démontre le théorème.

255. **Théorème.** — *Dans tout triangle, le carré construit sur un côté opposé à un angle aigu est équivalent à la somme des carrés construits sur les deux autres côtés, diminuée de deux fois le rectangle ayant pour base l'un de ces deux côtés et pour hauteur la projection de l'autre sur celui-là.*

On peut encore déduire ce théorème de la relation numérique correspondante. Si on veut le démontrer directement, il faut distinguer deux cas, selon que le triangle a tous ses angles aigus ou non. Dans les deux cas, la démonstration est analogue à celle du théorème précédent.

256. Problème. — *Etant donnés deux polygones semblables, construire un polygone semblable à ces deux-là et équivalent à leur somme ou à leur différence.*

Soient a, b, x, trois côtés homologues des polygones donnés A, B et du polygone inconnu X. En supposant $a > b$, on a

$$\frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2} = \frac{X}{x^2} = \frac{A+B}{a^2+b^2} = \frac{A-B}{a^2-b^2}.$$

Si donc on veut que $X = A + B$, il faudra que $x^2 = a^2 + b^2$, c'est-à-dire que x sera l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant pour côtés de l'angle droit a et b. Au contraire, si l'on veut que $X = A - B$, il faudra que $x^2 = a^2 - b^2$, et alors x sera le second côté de l'angle droit d'un triangle rectangle ayant a pour hypoténuse et b pour premier côté de l'angle droit.

257. Remarque. — Le raisonnement qu'on vient de faire prouve que, si l'on considère trois polygones semblables ayant pour côtés homologues l'hypoténuse et les deux autres côtés d'un triangle rectangle, le premier de ces polygones équivaut à la somme des deux autres.

258. Problème. — *Etant donnés deux polygones* A *et* B, *construire un polygone* X *semblable au premier et équivalent au second.*

Soient a et x, deux côtés homologues de A et de X ; on doit avoir

$$\frac{A}{X} = \frac{a^2}{x^2}, \quad \text{et} \quad X = B;$$

donc

$$\frac{A}{B} = \frac{a^2}{x^2}.$$

Soient α et β, les côtés des carrés équivalents à A et à B ; la proportion précédente peut s'écrire

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{a^2}{x^2} \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{a}{x}.$$

Donc x est la quatrième proportionnelle aux trois longueurs α, β, a.

259. Problème. — *Construire un polygone* X *semblable à un polygone donné* A *et dont l'aire soit à celle de ce polygone dans un rapport donné* $\frac{m}{n}$.

Soient x et a deux côtés homologues des polygones X et A. On doit avoir

$$\frac{X}{A} = \frac{x^2}{a^2} \quad \text{et} \quad \frac{X}{A} = \frac{m}{n};$$

d'où

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{m}{n}.$$

Si le rapport donné $\frac{m}{n}$ est *numérique*, par exemple, égal à $\frac{3}{4}$, on aura

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{3}{4}, \text{ ou } x^2 = a \times \frac{3}{4} a;$$

x est alors la moyenne géométrique des longueurs a et $\frac{3}{4} a$.

Si m et n sont des longueurs, on écrira

$$x^2 = a \times \frac{am}{n};$$

on construira [145] une longueur b égale à $\frac{am}{n}$ et x sera encore la moyenne géométrique de deux longueurs a et b.

On peut opérer autrement, en se rappelant que, dans un triangle rectangle, le rapport des carrés des côtés de l'angle droit est égal au rapport de leurs projections sur l'hypoténuse. On prend, sur une droite (fig. 224), deux longueurs consécutives, BD $= m$, DC $= n$; sur BC comme diamètre, on décrit une demi-circonférence, qui rencontre la perpendiculaire à BC menée par D en un point A tel que

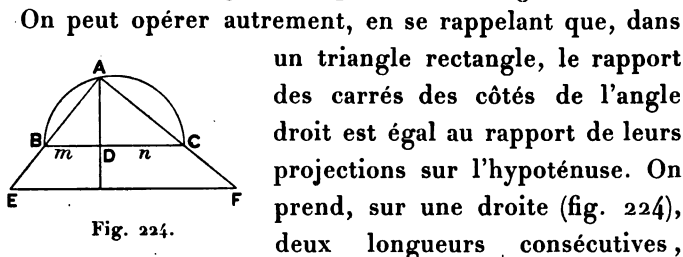


Fig. 224.

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{m}{n} = \frac{x^2}{a^2}.$$

D'où

$$\frac{x}{a} = \frac{AB}{AC}.$$

Par suite, si l'on prend sur AC une longueur AF égale à a et que l'on mène par F la parallèle à BC, qui rencontre AB en E, la longueur AE sera égale à x.

MÉTHODE DES AIRES

260. La comparaison des aires est une méthode féconde pour la recherche des *propriétés métriques*, c'est-à-dire des relations qui existent entre les nombres qui mesurent les longueurs des lignes d'une figure. Par exemple, nous savons que le rapport des aires de deux polygones est indépendant du procédé employé pour les comparer; si donc on évalue ce rapport de deux façons différentes, en égalant les deux expressions trouvées, on aura une relation entre les longueurs qui entrent dans ces expressions.

261. Ainsi, soit (fig. 225) AD la bissectrice de l'angle A du triangle ABC. Comparons les deux triangles ABD et ADC ; si l'on prend BD et DC pour bases de ces deux triangles, ils ont même hauteur ; donc

$$\frac{ABD}{ADC} = \frac{BD}{DC}.$$

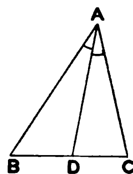


Fig. 225.

D'autre part, si l'on prend AB et AC pour bases de ces deux triangles, ils ont encore même hauteur; car le point D, étant situé sur la bissectrice de l'angle A, est équidistant des deux côtés de cet angle; donc

$$\frac{ABD}{ADC} = \frac{AB}{AC}.$$

La comparaison de ces deux proportions donne

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}.$$

On retrouve ainsi le théorème du n° 139.

La démonstration précédente s'applique à la bissectrice extérieure.

262. On pourrait démontrer, par cette méthode, tous les théorèmes du troisième livre. C'est ce qu'on faisait autrefois; on avait même recours à la considération des aires pour démontrer qu'un triangle qui a deux angles égaux est isoscèle [1]. Aujourd'hui, on est d'accord pour admettre que toutes les propriétés métriques fondamentales doivent être établies directement, et la méthode des aires est considérée surtout comme une méthode d'invention, pour la découverte de propriétés nouvelles.

EXERCICES

1. Par un point D pris sur la base BC d'un triangle ABC, mener deux droites rencontrant les deux autres côtés en E et F, de manière à partager le triangle ABC en trois parties proportionnelles à des longueurs données *m*, *n*, *p*.

— En menant par E et F des parallèles à AD rencontrant BC en G et H, on voit que ces trois parties sont équivalentes aux trois triangles ABG, AGH, AHC, par suite, proportionnelles à BG, GH, HC. Donc on est ramené à partager BC en parties proportionnelles à *m*, *n*, *p*.

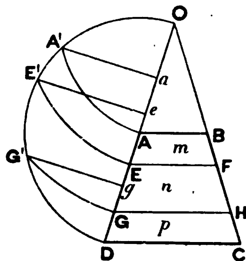


Fig. 226.

2. Partager un trapèze ABCD (fig. 226), par des parallèles aux bases, en parties proportionnelles à des longueurs données *m*, *n*, *p*.

Soient EF, GH les deux parallèles cherchées. On a

$$\frac{ABFE}{m} = \frac{EFHG}{n} = \frac{GHCD}{p},$$

ou, en appelant O le point de rencontre de AD et de BC,

$$\frac{OEF - OAB}{m} = \frac{OGH - OEF}{n} = \frac{ODC - OGH}{p}.$$

[1] EUCLIDE, livre I, proposition 6.

Or, les triangles OAB, OEF,,... étant semblables,

$$\frac{OAB}{\overline{OA}^2} = \frac{OEF}{\overline{OE}^2} = \frac{OGH}{\overline{OG}^2} = \frac{ODC}{\overline{OD}^2},$$

d'où

$$\frac{OEF - OAB}{\overline{OE}^2 - \overline{OA}^2} = \frac{OGH - OEF}{\overline{OG}^2 - \overline{OE}^2} = \frac{ODC - OGH}{\overline{OD}^2 - \overline{OG}^2}.$$

Par conséquent,

$$\frac{\overline{OE}^2 - \overline{OA}^2}{m} = \frac{\overline{OG}^2 - \overline{OE}^2}{n} = \frac{\overline{OD}^2 - \overline{OG}^2}{p}. \qquad (1)$$

Sur OD comme diamètre, décrivons une demi-circonférence, et, de O comme centre, avec OA, OE, OG pour rayons, décrivons des arcs de cercles, qui coupent cette demi-circonférence en A', E', G' ; puis projetons A', E', G' sur OD en *a*, *e*, *g*. On a

$$\overline{OA}^2 = \overline{OA'}^2 = OD \times Oa,$$
$$\overline{OE}^2 = \overline{OE'}^2 = OD \times Oe;$$
$$\overline{OG}^2 = \overline{OG'}^2 = OD \times Og$$

En substituant dans (1) et divisant par OD, il vient

$$\frac{Oe - Oa}{m} = \frac{Og - Oe}{n} = \frac{OD - Og}{p},$$

ou

$$\frac{ae}{m} = \frac{eg}{n} = \frac{gD}{p}.$$

Donc on est ramené à partager *a*D en parties proportionnelles à *m*, *n*, *p*, etc.

On procède de même pour partager un triangle en parties proportionnelles à des longueurs données par des parallèles à la base.

3. Inscrire à un triangle un rectangle d'aire donnée.

4. Inscrire à un triangle un parallélogramme d'aire donnée, ayant avec ce triangle un angle commun.

5. Inscrire à un carré un rectangle d'aire donnée.

6. Inscrire à un carré le plus petit carré possible.

7. Sur la figure du n° 254, on joint les sommets des carrés de manière à former un hexagone GHKLMN. Evaluer l'aire de cet hexagone et la somme des carrés de ses côtés.

ivalentes par une per-

xtrême raison par une

re et les angles. — On
semblable au triangle

les et intérieurs, l'aire
à l'autre, est moyenne
miers.
triangles en joignant
ux premiers, etc.
ôtés donnés, celui dont
côtés sont perpendicu-

se et de même aire, le
périmètre.
sur une parallèle à la

res de même base, le

irectement, ou bien le
suivant, que le lecteur

ent l'une de l'autre, de
nd v a la valeur v', réci-
ximum v', pourvu que le

res, le triangle équila-

e donné, compris entre
angle isoscèle est maxi-

et un périmètre donné,
minimum.
cercle exinscrit dans
e des points de contact
le l'angle est égale au

t la moitié du côté AB ;
et la bissectrice exté-
gles ADC, ADB, ABC,
2, 3, 4.

19. Par un point intérieur à un triangle, on mène des parallèles aux côtés ; ces droites partagent le triangle en trois parallélogrammes et trois triangles. Prouver que le produit des aires des parallélogrammes vaut huit fois le produit des aires des triangles.

20. Soit O un point pris dans le plan d'un triangle ABC ; on mène les droites OA, OB, OC, qui rencontrent BC, CA, AB en A′, B′, C′. Démontrer que

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{AA'}} + \frac{\overline{OB'}}{\overline{BB'}} + \frac{\overline{OC'}}{\overline{CC'}} = 1.$$

— On évaluera le rapport de l'aire de chacun des triangles OBC, OCA, OAB à celle du triangle ABC et on écrira que la somme de ces trois rapports est égale à l'unité.

21. Si par un point O pris sur la bissectrice d'un angle BAC, on mène différentes sécantes terminées aux côtés de l'angle, la plus petite est celle qui est perpendiculaire à la bissectrice.

— Soit DE la sécante perpendiculaire à OA et soit FG une autre sécante. Si H est le point de rencontre de FG avec la parallèle à AE menée par D, on voit que le triangle DOH est égal à EOG. Donc le triangle ADE est plus petit que AFG ; or la hauteur AO du premier est plus grande que celle du second, donc sa base est plus petite.

22. Si on désigne par x, y, z les distances d'un point M, pris à l'intérieur d'un triangle, aux trois côtés a, b, c, on a

$$ax + by + cz = 2S.$$

Etendre la formule à toutes les positions de M dans le plan en donnant des signes à x, y, z.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

LIVRE I

CHAPITRE PREMIER. — DES ANGLES

CHAPITRE II. — DES PARALLÈLES

CHAPITRE III. — POLYGONES, TRIANGLES

CHAPITRE III. — POSITIONS RELATIVES DE DEUX CERCLES

CHAPITRE IV. — MESURE DES ANGLES

CHAPITRE V. — CONSTRUCTIONS

CHAPITRE VI. — DÉPLACEMENT D'UNE FIGURE PLANE

LIVRE III

CHAPITRE PREMIER. — VECTEURS

CHAPITRE II. — LIGNES PROPORTIONNELLES

CHAPITRE III. — HOMOTHÉTIE

CHAPITRE IV. — SIMILITUDE

CHAPITRE V. — RELATIONS MÉTRIQUES

ÉVREUX, IMPRIMERIE DE CHARLES HÉRISSEY